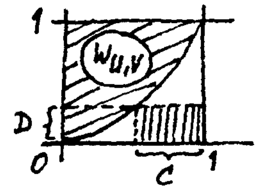
Beknopte uitwerking tentamen Kansrek. II, 25 augustus 1998

1. (i). $\mathbb{P}((X,Y)\in B) = \frac{1}{\pi}\cdot \text{opp}(B)$ voor $B\subset W$. Dichtheid: $f(x,y)=\frac{1}{\pi}$ voor $(x,y)\in W$.

(ii). Voor $x\in(-1,1)$: $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$. Gevolg (subst.regel):
$\mathbb{E}U = \mathbb{E}|X| = \int_{-1}^{1} |x|\cdot\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{4}{3\pi}$.

(iii). $V = X^2+Y^2$, dus voor $a\in(0,1)$: $F_V(a) = \mathbb{P}(X^2+Y^2\le a) = \mathbb{P}((X,Y)\in \overset{\text{cirkelschijf met straal } \sqrt{a}}{B_{\sqrt{a}}}) =$
$= \frac{1}{\pi}\cdot\text{opp}(B_{\sqrt{a}}) = \frac{1}{\pi}\cdot\pi a = a$: V hom$(0,1)$.

(iv). Merk op dat $V\ge U^2$, dus $W_{U,V} = \{(u,v)\in(0,1)^2 : v\ge u^2\}$. Gevolg: er zijn C en D zó dat $\mathbb{P}(U\in C; V\in D) = 0 \neq \mathbb{P}(U\in C).\mathbb{P}(V\in D)$: afh.



2. (i). Voor $u>0$: $F_U(u) = 1-\mathbb{P}(X>u; Y>u) = 1-\mathbb{P}(X>u)^2 = 1-e^{-2u}$, en ook $F_{\frac12 X}(u) =$
$= \mathbb{P}(X\le 2u) = 1-e^{-2u}$, dus: $U \overset{d}{=} \frac12 X$.

(ii). Voor $0<u<v$: $F(u,v) = \mathbb{P}(U\le u; V\le v) = F_V(v) - \mathbb{P}(U>u; V\le v)$, met $\mathbb{P}(U>u; V\le v) =$
$= \mathbb{P}(u<X\le v; u<Y\le v) = \mathbb{P}(u<X\le v)^2 = (e^{-u}-e^{-v})^2$, dus $f(u,v) = \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}F(u,v) =$
$= 0 - \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}(e^{-u}-e^{-v})^2 = 2e^{-(u+v)}$.

(iii). Voor $v>0$: $f_V(v) = \int_0^v 2e^{-(u+v)}\,du = 2e^{-v}(1-e^{-v})$ en ook (convolutie-formule)
$f_{\frac12 X+Y}(v) = \int_0^v f_{\frac12 X}(v-y)\,f_Y(y)\,dy = \int_0^v 2e^{-2(v-y)}e^{-y}\,dy = 2e^{-2v}(e^{v}-1) = 2e^{-v}(1-e^{-v})$.

(iv). $\text{Cov}(U,V) = \mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}U.\mathbb{E}V$ met $\mathbb{E}U = \mathbb{E}\frac12 X = \frac12$, $\mathbb{E}V = \mathbb{E}(\frac12 X+Y) = \frac12\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = \frac32$
en $\mathbb{E}(UV) \overset{!}{=} \mathbb{E}(XY) \overset{\text{onafh.}}{=\!=} \mathbb{E}X.\mathbb{E}Y = 1$, dus: $\text{Cov}(U,V) = 1-\frac12\cdot\frac32 = \frac14$.

3. (i). Voor $n\in\mathbb{Z}_+$: $\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{P}(n \text{ keer } M, \text{ dan } K) = (\frac12)^n\cdot\frac12 = (\frac12)^{n+1}$. Gevolg: voor $m\in\mathbb{N}$
is $\mathbb{P}(M=m) = \mathbb{P}(N=m-1) = (\frac12)^m$: M geom$(\frac12)$, dus $\mathbb{E}N = \mathbb{E}M-1 = \frac{1}{1/2}-1 = 1$.

(ii). $(X\,|\,N=0)$ ontaard in 0, en voor $n\in\mathbb{N}$: $(X\,|\,N=n)$ binomiaal $(n, p=\frac16)$.

(iii). Daar $\mathbb{E}(X\,|\,N=n) = \frac16 n$ voor alle n, is $\mathbb{E}X = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}(X\,|\,N=n)\,\mathbb{P}(N=n) =$
$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac16 n\,\mathbb{P}(N=n) = \frac16\sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathbb{P}(N=n) = \frac16\mathbb{E}N$ [dus $\mathbb{E}X = \frac16$].

(iv). $\mathbb{P}(X=0) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=0\,|\,N=n)\,\mathbb{P}(N=n) = 1\cdot\frac12 + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac56)^n\cdot(\frac12)^{n+1} = \frac12\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{5}{12})^n = \frac12\cdot\frac{1}{1-5/12} = \frac67$

4. (i). $T :=$ totaal aantal $= X_1+\cdots+X_{60}$, met $X_1,\ldots,X_{60}$ onafh., Ps(λ), dus: T Ps(60λ).
Als $\lambda=\frac35$: $\mathbb{P}(T\ge 45) = \sum_{k=45}^{\infty}\frac{36^k}{k!}e^{-36} \approx \mathbb{P}(Y\ge 44{,}5) = 1-\Phi(1{,}42) = 0{,}0778$ met Y norm$(36,36)$

(ii). Gevr. kans $= \mathbb{P}(X_1=\cdots=X_5=0; X_6\ge 1) = (e^{-\lambda})^5(1-e^{-\lambda}) = e^{-3}(1-e^{-3/5})$ $(\approx 0{,}0225)$.

(iii). Zij $U := X_1+\cdots+X_{20}$ en $V := X_{21}+\cdots+X_{60}$, dan $U+V=T$ met U Ps(20λ), V Ps(40λ).
Aldus gevr. kans $= \mathbb{P}(T=U) = \mathbb{P}(V=0) = e^{-40\lambda}$.

(iv). Daar U en V onafh. zijn, is gevr. kans $= \mathbb{P}(T=U\,|\,T=n) = \frac{\mathbb{P}(U=n;\,V=0)}{\mathbb{P}(T=n)} =$
$= \frac{\mathbb{P}(U=n)\,\mathbb{P}(V=0)}{\mathbb{P}(T=n)} = \frac{(20\lambda)^n}{n!}e^{-20\lambda}.\,e^{-40\lambda} \Big/ \frac{(60\lambda)^n}{n!}e^{-60\lambda} = (\frac13)^n$.