

Tentamen Kansrekening 1

6 januari 2014, 18:30-20:30 uur

Dit tentamen bestaat uit 4 vragen. Het totale aantal punten is 36. Cijfer = $\frac{\text{Aantal punten}}{4} + 1$.
Motiveer altijd je antwoord. Binomiaalcoëfficiënten en faculteiten mag je laten staan in je antwoord. Alleen het gebruik van een niet-grafische rekenmachine is toegestaan.

1.

Uit een vaas met 9 ballen, genummerd 1 tot en met 9, trekt Loes een bal. Ze schrijft het cijfer op en gooit de bal weg. Dit herhaalt ze nog twee keer, ze heeft dus daarna een getal van 3 cijfers opgeschreven.

a) [2 punten] Beschrijf de uitkomstenruimte S en geef $\#S$.

Laat A de gebeurtenis zijn dat alle cijfers die Loes heeft opgeschreven groter dan of gelijk aan 4 zijn.

b) [2 punten] Bereken $P(A)$.

Laat B de gebeurtenis zijn dat alle cijfers die Loes heeft opgeschreven kleiner dan of gelijk aan 6 zijn.

c) [3 punten] Bereken $P(A \cup B)$.

2.

Edwin gooit 2 keer met een dobbelsteen. De uitkomst van de twee worpen heet *toegestaan* als het tweede aantal ogen strict kleiner is dan het eerste aantal ogen. Laat A de gebeurtenis zijn dat een uitkomst toegestaan is.

a) [2 punten] Bereken $P(A)$.

Laat B de gebeurtenis zijn dat de som van het aantal ogen van de twee worpen gelijk aan 7 is.

b) [3 punten] Onderzoek of de gebeurtenissen A en B onafhankelijk zijn.

Edwin gaat nu het volgende spel spelen. Als hij een uitkomst (van twee worpen) gooit die niet toegestaan is, moet hij 1 euro betalen. Als hij een uitkomst gooit die wel toegestaan is, krijgt hij het aantal ogen van de laatste worp uitbetaald in euro's. Laat X de winst van Edwin zijn na 1 spel (let op: verlies is negatieve winst).

c) [4 punten] Bereken $E(X)$.

3.

Willemijn gaat op oudejaarsavond naar een feestje van vrienden waar om 00:00 uur vuurwerk wordt afgestoken. Laat de stochast X het aantal vuurpijlen zijn die aangestoken worden, maar niet afgaan. X is Poisson verdeeld met parameter 2.

- a) [2 punten] Bereken de kans dat tenminste twee vuurpijlen niet afgaan.

Als er X vuurpijlen niet zijn afgegaan, drinkt Willemijn 2^X glazen champagne. Laat de stochast Y het aantal glazen champagne zijn dat Willemijn op deze manier drinkt; er geldt dus $Y = 2^X$.

- b) [2 punten] Bereken $E(Y)$. (Hint: Gebruik $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.)

Bij thuiskomst is Willemijn zo dronken van de champagne dat ze niet meer haar huissleutel herkent. Ze heeft 9 sleutels en pakt elke keer opnieuw een van deze 9 sleutels (ze onthoudt dus niet eens of ze al een sleutel geprobeerd heeft!), net zo lang totdat de deur opengaat. Laat de stochast W het aantal keer zijn dat Willemijn in totaal een sleutel heeft gepakt als ze eindelijk binnen is.

- c) [3 punten] Geef de waardenverzameling, kansverdeling en verwachting van W .
(NB: deze hoeft je dus niet te berekenen)

Tim, een vriend van Willemijn die ook op het feest was, heeft ook 9 sleutels en kan bij thuiskomst ook zijn huissleutel niet meer herkennen. Hij is alleen iets minder dronken dan Willemijn en probeert daarom een sleutel die niet past, daarna niet nog een keer. Laat de stochast T het aantal keer zijn dat Tim in totaal een sleutel heeft gepakt als hij eindelijk binnen is.

- d) [4 punten] Laat zien dat $P(T = n) = \frac{1}{9}$, voor $n = 1, \dots, 9$.
e) [3 punten] Bereken $Var(T)$, waarbij je mag gebruiken dat $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$ en $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

4.

Je hebt 3 identieke doosjes met 4 bonbons. In doosje 1 zitten alleen witte bonbons, in doosje 2 alleen zwarte bonbons en in doosje 3 zitten 2 witte en 2 zwarte bonbons. Je pakt volstrekt willekeurig een van de 3 doosjes. Daarna pak je, zonder te kijken, achter elkaar 2 bonbons uit het doosje.

- a) [3 punten] Laat zien dat de kans dat beide bonbons wit zijn gelijk is aan $7/18$.

Er is nu gegeven dat de eerste bonbon die je gepakt hebt wit is.

- b) [3 punten] Bereken de conditionele kans dat beide bonbons wit zijn.