

Tentamen Kansrekening I voor Wiskunde

16 december 2008

Alle onderdelen wegen even zwaar. Motiveer altijd je antwoord

1. We gooien twee maal met een dobbelsteen, en onderscheiden de volgende gebeurtenissen: A is de gebeurtenis dat de eerste worp ten minste 4 is; B is de gebeurtenis dat de tweede worp ten minste 4 is, en C is de gebeurtenis dat de som van de ogen van de twee worpen gelijk is aan 10. Is de collectie gebeurtenissen $\{A, B, C\}$ onafhankelijk?

2. De kans dat een baby de bevalling overleeft wordt geschat op 0.993. Voor baby's die met een keizersnede ter wereld komen is de overlevingskans bij de bevalling 0.987. Verder is bekend dat 15% van de baby's met een keizersnede ter wereld komt.

(a) Wat is de overlevingskans van een baby die niet met de keizersnede ter wereld komt?

(b) Wat is de kans dat een baby die overleeft met de keizersnede ter wereld is gebracht?

3. Stel dat X een stochastische grootte is met kansmassafunctie gegeven door $P(X = i) = 1/n$, voor $i = 1, 2, \dots, n$, waarbij n een geheel getal is.

(a) Laat zien dat $E(X) = (n+1)/2$. Hierbij mag je gebruik maken van het feit dat $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$.

(b) Laat zien dat $\text{Var}(X) = \frac{1}{12}(n^2 - 1)$. Hierbij mag je gebruik maken van het feit dat $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(c) Laat zien dat als $n \rightarrow \infty$, de verwachting van X/n naar $\frac{1}{2}$ convergeert, en de variantie van X/n naar $\frac{1}{12}$.

4. (a) Leg uit waarom

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

door te laten zien dat links en rechts twee verschillende manieren staan om het aantal deelverzamelingen van een verzameling met n elementen te tellen.

(b) Leid uit de gelijkheid in (a) af dat

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Er is ook een combinatorische interpretatie van de gelijkheid in (b). Stel dat we niet alleen een deelverzameling van een verzameling van n elementen kiezen, maar dat we bovendien uit zo'n verzameling 1 element het label "goed" geven. Dit heet een *gelabelde* deelverzameling. Dezelfde deelverzameling met een verschillend "goed" element vormen verschillende gelabelde deelverzamelingen.

(c) Bewijs de gelijkheid in (b) door te laten zien dat links en rechts twee verschillende manieren staan om het aantal gelabelde deelverzamelingen uit een verzameling met n elementen te tellen.

5. In Texas wordt het spel *Lotto* als volgt gespeeld. Er zijn 44 ballen, genummerd $1, \dots, 44$. Uit deze 44 ballen worden in één greep 5 ballen getrokken. Dit zijn de winnende nummers. Na het trekken van de 5 winnende nummers worden de vijf getrokken ballen teruggelegd, en wordt er nogmaals 1 bal getrokken. Het nummer van deze bal is het bonusnummer, en zou dus gelijk kunnen zijn aan een van de eerder getrokken 5 nummers.

Om mee te doen met het spel, moet je van tevoren 5 getallen kiezen uit $1, \dots, 44$, en ook een bonusgetal, opnieuw uit $1, \dots, 44$. Ook hiervoor geldt dat het bonusgetal best gelijk mag zijn aan een van de eerder gekozen 5 getallen.

(a) Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er voor de 5 winnende nummers plus het bonusnummer?

(b) Welke kans is groter: de kans dat je de 5 winnende nummers goed hebt maar niet het bonusnummer, of de kans dat je precies 4 van de 5 winnende nummers goed hebt en ook het bonusnummer?

(c) Bereken de verwachting van het aantal winnende getallen van een deelnemer (exclusief het bonusgetal).