

Tentamen Kansrekening 1 voor Wiskunde

21 oktober 2008, 12.00–14.00

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven met in totaal 12 onderdelen. Alle onderdelen leveren maximaal 3 punten op. Er zijn 36 punten te behalen (cijfer = $\frac{1}{4}(\text{aantal punten})+1$). Leg bij elke berekening uit hoe je aan je antwoord komt. Het gebruik van een rekenmachine is *niet* toegestaan. Na correctie liggen de tentamens ter inzage op het onderwijsbureau. Veel succes!

1. Bekijk een experiment met uitkomstenruimte Ω en kansmassafunctie p .
 - (a) Geef de definitie van de kansmaat P voor dit experiment.
 - (b) Laat $B_1, B_2, \dots, B_n$ gebeurtenissen zijn. Geef de condities waaraan deze gebeurtenissen moeten voldoen om een partitie te vormen.
 - (c) Stel dat de gebeurtenissen $B_1, B_2, \dots, B_n$ een partitie vormen. Bewijs dat voor elke gebeurtenis A geldt dat $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)$.
2. Ik heb een vaas met drie rode, twee witte en één blauwe bal. Ik trek eerst met één greep drie willekeurige ballen uit de vaas. Vervolgens trek ik met een tweede greep twee van de drie resterende ballen uit de vaas. Er blijft één bal in de vaas achter.
 - (a) Laat A de gebeurtenis zijn dat de eerste drie ballen die ik trek drie verschillende kleuren hebben. Bereken $P(A)$.
 - (b) Laat B de gebeurtenis zijn dat de twee ballen die ik trek bij mijn tweede greep verschillende kleuren hebben. Bereken $P(B)$.
 - (c) Ga na of de gebeurtenissen A en B onafhankelijk zijn.
 - (d) Bereken de conditionele kans op gebeurtenis B , gegeven dat de laatste bal die in de vaas achter blijft rood is.
3. Stel we doen een experiment met uitkomstenruimte $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en kansmassafunctie $p(i) = i/15$ voor $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Laat $B = \{1, 2\}$. Vind voor dit experiment twee *verschillende* gebeurtenissen A en C die niet onafhankelijk zijn van elkaar, maar die wel allebei onafhankelijk zijn van de gebeurtenis B .

Zie ommezijde voor de laatste vraag

4. Drie spelers A, B en C spelen het volgende spel. Ze gooien om beurten met een dobbelsteen, net zolang totdat één van de spelers een winnend aantal ogen gooit. Speler A wint het spel als hij een 1 gooit, speler B wint als hij een 1 of een 2 gooit, en speler C wint het spel als hij een 1, een 2 of een 3 gooit. De volgorde van gooien is A, B, C, A, B, C, enzovoort totdat de winnaar bekend is. Dan is het spel afgelopen.

(a) Laat N_A het aantal keer zijn dat speler A met de dobbelsteen gooit. Toon aan dat N_A een geometrische verdeling heeft met parameter $p = 13/18$.

(b) Bereken $P(\text{speler A wint} \mid N_A = n)$ en vervolgens $P(\text{speler A wint})$. Bereken ook $P(\text{speler B wint})$ en $P(\text{speler C wint})$.

(c) Laat N het *totale* aantal worpen met de dobbelsteen zijn (tot en met de winnende worp), en definieer de toevalsvariabele X door $X = 3N_A - N$. Ga na dat X onafhankelijk is van N_A en geef de kansmassafunctie van X .

(d) Bereken $E(N)$ en $\text{var}(N)$. Hierbij mag je zonder bewijs gebruiken dat de variantie van een toevalsvariable die een geometrische verdeling heeft met parameter p , gelijk is aan $(1 - p)/p^2$.