

## Tentamen Kansrekening I

6 mei 2002

**1.** Bij lokale verkiezingen in een stad doen drie partijen mee: socialisten, liberalen en conservatieven. Van alle inwoners noemt 46 procent zichzelf socialist, 30 procent noemt zich liberaal, en 24 procent conservatief. Tijdens de laatste lokale verkiezingen bracht 35 procent van de socialisten, 62 procent van de liberalen, en 58 procent van de conservatieven hun stem uit.

Stel we kiezen een toevallige inwoner van de stad. Gegeven dat deze persoon zijn/haar stem heeft uitgebracht, wat is de kans dat hij/zij

- (a) een socialist is?
- (b) een liberaal is?
- (c) Wat was het opkomstpercentage bij de verkiezingen?

**2.** Stel  $P$  is een kansmaat op een uitkomstenruimte  $\Omega$ , en laat  $E \subset \Omega$  en  $F \subset \Omega$ .

(a) Laat zien dat de kans dat precies een van de gebeurtenissen  $E$  of  $F$  optreedt gelijk is aan  $P(E) + P(F) - 2P(E \cap F)$ .

(b) Laat zien dat

$$P(E \cap F) \geq P(E) + P(F) - 1.$$

(c) Gebruik (b) en inductie om te laten zien dat voor gebeurtenissen  $E_1, \dots, E_n$  geldt dat

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) \geq P(E_1) + \dots + P(E_n) - (n - 1).$$

**3.** Stel we gooien twee dobbelstenen.  $X$  is het aantal ogen van de eerste dobbelsteen,  $Y$  het totaal aantal ogen van de tweede dobbelstenen.

- (a) Bepaal de gezamenlijke kansmassafunctie van  $(X, Y)$ .
- (b) Bepaal  $E(Y|X = x)$  voor alle mogelijke waarden van  $x$  en  $y$ .
- (c) Bepaal de verwachting van  $Y$  met behulp van de uitkomst van (c).
- (d) Bepaal de variantie van  $X$ .
- (e) Zijn  $X$  en  $Y$  onafhankelijk? Motiveer je antwoord.

**4.** De stochastische vector  $(X, Y)$  heeft gezamenlijke kansmassafunctie

$$p(x, y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y (1-p_1-p_2)^{n-x-y},$$

voor  $0 \leq x, y \leq n$  met  $x + y \leq n$ .

(a) Laat zien dat de marginale verdeling van  $X$  de binomiale verdeling met parameters  $n$  en  $p_1$  is.

(b) Laat zien dat

$$P(X = x|Y = y) = \frac{(n - y)!}{x!(n - x - y)!} \left(1 - \frac{p_1}{1 - p_2}\right)^{n - y - x} \left(\frac{p_1}{1 - p_2}\right)^x,$$

voor alle relevante  $x$  en  $y$ .

(c) Bepaal  $E(X|Y = y)$  door het antwoord van (b) te herkennen als een binomiale verdeling.