

1. (a) Zij $V = \{\tau_1, \tau_2, \omega_3, \omega_4, \tau_5, \dots, \tau_6\}$ de verzameling van de ballen. Kies $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in V^3 : \omega_1, \omega_2, \omega_3 \text{ verschillend}\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ en de kansmaat $\mathbf{P}$ homogeen. Merk op dat $\#(\Omega) = \binom{6}{3} 3! = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.
Zij nu C de eventualiteit dat de eerste getrokken bal nummer 1 heeft. Dan $\#(C) = \binom{1}{1} 1! \binom{2}{2} 2! = 1 \cdot 7 \cdot 6 = 42$. Dus $\mathbf{P}(C) = \frac{42}{336} = \frac{1}{8}$.
- (b) Zij D de beschreven eventualiteit. Dan $\#(D) = 6 \cdot 2 \cdot 5 = 60$ en dus $\mathbf{P}(D) = \frac{60}{336} = \frac{5}{28}$.
- (c) Zij E de eventualiteit dat er tenminste 1 witte bal wordt getrokken. Dan is E^c de eventualiteit dat er alleen rode ballen worden getrokken. Dus $\#(E^c) = \binom{6}{3} 3! = 120$. Daarom $\mathbf{P}(E^c) = \frac{120}{336} = \frac{5}{14}$. Dus $\mathbf{P}(E) = \frac{9}{14}$.
- (d) De kans dat de eerste getrokken bal rood is $\binom{6}{1} 1! \binom{2}{2} 2! / 336 = 6 \cdot 7 \cdot 6 / 336 = \frac{3}{4}$.
- (e) De eventualiteit B bevat vier elementen: $(\tau_2, \omega_4, \tau_6)$, $(\tau_2, \omega_4, \tau_8)$, (τ_2, τ_6, τ_8) , $(\omega_4, \tau_6, \tau_8)$, en dus is $\mathbf{P}(B) = \frac{4}{336} = \frac{1}{84}$.
- (f) We bepalen nu $A_1 \cap B$. Merk op dat bij precies 3 van de vier elementen van B de eerste bal rood is. Dus $\mathbf{P}(A_1 \cap B) = \frac{3}{336} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{336} = \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}(B)$, waaruit volgt dat A_1 en B onafhankelijk zijn.
2. (a) We kiezen $\mathbf{P}(A_k) = \frac{1}{N+1}$. Verder kiezen we $\mathbf{P}(Z_2 | A_k) = \frac{(k-1)(k-2)}{N(N-1)}$ omdat de kans dat we uit een bak met N ballen waarvan er $k-1$ zwart zijn twee zwarte trekken gelijk is aan $\binom{k-1}{2} / \binom{N}{2}$ als $k \geq 3$ en aan 0 als $k = 1, 2$.
- (b) $\mathbf{P}(Z_2) = \sum_{k=1}^{N+1} \mathbf{P}(Z_2 | A_k) \mathbf{P}(A_k)$ en dus

$$\mathbf{P}(Z_2) = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{(k-1)(k-2)}{N(N-1)} \frac{1}{N+1} = \frac{1}{(N+1)N(N-1)} \sum_{k=3}^{N+1} (k-1)(k-2).$$
- (c) In dit geval is $\mathbf{P}(Z_2) = \frac{1}{60}(4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2) = \frac{1}{5}$. Verder bevat bak V_5 uitsluitend zwarte ballen. Daarom is de gevraagde kans

$$\mathbf{P}(A_5 | Z_2) = \frac{\mathbf{P}(Z_2 | A_5) \mathbf{P}(A_5)}{\mathbf{P}(Z_2)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{3}{5}.$$

(Overigens is voor elke waarde van N de kans $\mathbf{P}(Z_2) = \frac{1}{5}$. Dát aantonen is een te moeilijke opdracht voor dit tentamen.)

Z.O.Z.

3. (a) $\mathbf{P}(Y < 3) = F_Y(3-) = 1 - (2+1)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,
 $\mathbf{P}(Y \leq 3) = F_Y(3) = 1 - (3+1)\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$,
 $\mathbf{P}(Y = 2) = F_Y(2) - F_Y(2-) = (1 - (2+1)\left(\frac{1}{2}\right)^2) - (1 - (1+1)\left(\frac{1}{2}\right)^1) = \frac{1}{4}$,
 $\mathbf{P}(Y > 2) = 1 - F_Y(2) = 1 - (1 - (2+1)\left(\frac{1}{2}\right)^2) = \frac{3}{4}$,
 $\mathbf{P}(Y = 2\frac{1}{2}) = F_Y(2\frac{1}{2}) - F_Y(2\frac{1}{2}-) = (1 - (2+1)\left(\frac{1}{2}\right)^2) - (1 - (2+1)\left(\frac{1}{2}\right)^2) = 0$,
 $\mathbf{P}(Y < \pi) = F_Y(\pi-) = 1 - (3+1)\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$.
- (b) Als $a \notin \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ dan is in het punt a de functie F_Y continu. Immers uit de definitie van F_Y blijkt dat alleen in de punten van $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ de functie F_Y discontinu zou kunnen zijn. Daarom geldt voor $a \notin \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ dat $F_Y(a) = F_Y(a-)$ en dus $\mathbf{P}(Y = a) = 0$.
- (c) Voor $a \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ hebben we dat $p_Y(a) = \mathbf{P}(Y = a) = F_Y(a) - F_Y(a-)$ en dus

$$\begin{aligned} p_Y(a) &= (1 - (a+1)\left(\frac{1}{2}\right)^a) - (1 - (a-1+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{a-1}) \\ &= a\left(\frac{1}{2}\right)^{a-1} - (a+1)\left(\frac{1}{2}\right)^a = \left(\frac{1}{2}\right)^a (2a - (a+1)) = (a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^a. \end{aligned}$$

we vinden (bedenk dat voor $a = 1$ volgt dat $a-1 = 0$)

$$p_Y(a) = \begin{cases} (a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^a, & a = 2, 3, 4, \dots, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

De waardenverzameling van Y is dus $\{2, 3, 4, \dots\}$.