

1. (a) $V = \{r_1, \dots, r_4, w_1, w_2, w_3, b_1, b_2\}$ en $\Omega = \{\omega \subset V : \#(\omega) = 4\}$ en dus bestaat Ω uit alle combinaties van 4 uit 9. Daarom $\#(\Omega) = \binom{9}{4} = 126$ en voor iedere $A \subset \Omega$ is $\mathbb{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$. ($\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.)

- (b) $A_r = \{\omega \in \Omega : \omega \subset \{w_1, w_2, w_3, b_1, b_2\}\}$. Dus $\#(A_r) = \binom{5}{4} = 5$. We vinden $\mathbb{P}(A_r) = \frac{5}{126}$.

$A_r \cap A_b$ bestaat uit alle trekkingen die geen rode en geen blauwe bal bevatten en daarom uitsluitend bestaan uit witte ballen. Omdat het aantal witte ballen kleiner is dan vier, is $A_r \cap A_b = \emptyset$. Dus $\mathbb{P}(A_r \cap A_b) = 0$.

- (c) B bevat alle trekkingen die bestaan uit twee van één kleur en van de andere kleuren ieder één. Dus door respectievelijk te nemen 2 rode, 1 witte, 1 blauwe daarna 1 rode 2 witte en 1 blauwe en tenslotte 1 rode, 1 witte en 2 blauwe zien we dat

$$\#(B) = \binom{4}{2} \binom{3}{1} \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{2} \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{2}$$

en dus $\#(B) = 6 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 1 = 72$, zodat $\mathbb{P}(B) = \frac{72}{126} = \frac{4}{7}$.

- (d) Uit $\mathbb{P}(A_r) > 0$, $\mathbb{P}(A_b) > 0$ en $\mathbb{P}(A_r \cap A_b) = 0$ volgt dat $\mathbb{P}(A_r \cap A_b) \neq \mathbb{P}(A_r)\mathbb{P}(A_b)$ en dus zijn de eventualiteiten A_r en A_b afhankelijk.

2. (a) Zij $\Omega = \{12, 3456\} \times \{r, w\}$. Definier D_1 de eventualiteit dat de dobbelsteen 1 of 2 ogen geeft, D_2 de eventualiteit dat de dobbelsteen 3, 4, 5 of 6 ogen geeft. Zij R de eventualiteit dat een rode bal wordt getrokken. Dan is $D_1 = \{12\} \times \{r, w\}$, $D_2 = \{3456\} \times \{r, w\}$ en $R = \{12, 3456\} \times \{r\}$. Voor de hand liggend is dat $\mathbb{P}(D_1) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(D_2) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(R|D_1) = \frac{4}{6}$ en $\mathbb{P}(R|D_2) = \frac{3}{6}$.

- (b) $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R|D_1)\mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(R|D_2)\mathbb{P}(D_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{17}{36}$.

- (c) Gevraagd wordt $\mathbb{P}(D_1|R)$. We nu:

$$\mathbb{P}(D_1|R) = \frac{\mathbb{P}(D_1 \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(R|D_1)\mathbb{P}(D_1)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{(1 - \frac{4}{6}) \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{17}{36}} = \frac{4}{19}.$$

Z.O.Z.

3. (a) $\Omega = \{(i, j) \in \{1, 2, \dots, 100\}^2 : i \neq j\}$, en verder $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ discreet homogeen, met dus $\mathbb{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$ voor iedere $A \subset \Omega$. Verder $\#(\Omega) = \binom{100}{2} 2! = 100 \cdot 99$.

- (b) Volgens het uitsplitsingsprincipe geldt:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \dots + \mathbb{P}(B \cap A_{100}).$$

Bedenk daarbij dat de eventualiteiten A_k disjunct zijn en als vereniging heel Ω hebben. Daar $B \cap A_k$ bestaat uit alle paren waarvan de eerste k is en de tweede niet groter is dan $k-2$, zien we dat $\#(B \cap A_k) = k-2$ voor $k \geq 3$. Dus $\mathbb{P}(B) = \frac{1+2+3+\dots+98}{9900} = \frac{49}{100}$.

4. (a) $\mathbb{P}(1 < Y < 4) = F(4-) - F(1) = \frac{65}{81} - \frac{1}{9} = \frac{56}{81}$.

$$\mathbb{P}(Y \leq 4) = F(4) = 1,$$

$$\mathbb{P}(1 \leq Y) = 1 - \mathbb{P}(Y < 1) = 1 - F(1-) = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81},$$

$$\mathbb{P}(Y = 3) = F(3) - F(3-) = \frac{65}{81} - \frac{33}{81} = \frac{32}{81},$$

$$\mathbb{P}(Y = \pi) = F(\pi) - F(\pi-) = \frac{65}{81} - \frac{65}{81} = 0.$$

- (b) De waardenverzameling voor X is $W_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Verder (formule (5.1) uit Hoofdstuk II) weten we dat voor $k \in W_X$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \frac{2^k}{3^4}.$$

Dus $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{81}$, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{8}{81}$, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{24}{81}$, $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{32}{81}$ en $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{16}{81}$ en dus

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \frac{1}{81}, & 0 \leq a < 1, \\ \frac{1}{9}, & 1 \leq a < 2, \\ \frac{17}{27}, & 2 \leq a < 3, \\ \frac{65}{81}, & 3 \leq a < 4, \\ 1, & 4 \leq a. \end{cases}$$

Daarom is F de verdelingsfunctie van X .

- (c) We berekenen $\mathbb{P}(X \text{ is oneven}) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 3) = \frac{8}{81} + \frac{32}{81} = \frac{40}{81}$. Dus $\mathbb{P}(X \text{ is even}) = 1 - \mathbb{P}(X \text{ is oneven}) = \frac{41}{81}$. We zien dat de kans dat X oneven kleiner is dan de kans dat X even is.