

Tentamen Kansrekening I voor BWI

7 juni 2005, 18.30 -21.30

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven en een bijlage. Er zijn 45 punten te behalen (cijfer=(aantal punten)/4,5). Geef een duidelijke toelichting bij de antwoorden! Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan, integralen mogen hier echter niet mee worden uitgerekend. Na de correctie liggen de tentamens ter inzage op het onderwijsbureau. Veel succes!

1. Een jongetje heeft vijf blauwe en vier witte knikkers in zijn rechter broekzak en vijf witte knikkers in zijn linker broekzak. Hij pakt een willekeurige knikker uit zijn rechter broekzak en stopt die ongezien in zijn linker broekzak. Daarna pakt hij een willekeurige knikker uit zijn linker broekzak.

(a) (3 punten) Bereken de kans dat de knikker die hij uit zijn linker broekzak haalt wit is.

(b) (3 punten) Stel hij een witte knikker uit zijn linker broekzak haalt. Bereken de (conditionele) kans dat hij een blauwe knikker van zijn rechter broekzak naar zijn linker broekzak verplaatst heeft.

2. (4 punten) We trekken twee keer achter elkaar, zonder terugleggen, een kaart uit een kaartspel (van 52 kaarten). Laat A de gebeurtenis zijn dat de eerste kaart een hartenkaart is en B de gebeurtenis dat de tweede kaart een aas is. Zijn de gebeurtenissen A en B onafhankelijk? Bewijs je antwoord.

3. Bij het spel 'hoog/laag/zeven' kan je wedden op de uitkomst van de som van de ogen bij een worp met twee dobbelstenen. Om dit spel te mogen spelen moet je 1 euro betalen. Als je wedt dat de uitkomst 'hoog' is, krijg je 2 euro als de som van de ogen in de verzameling $H = \{8, 9, 10, 11, 12\}$ ligt. Je hebt dan dus 1 euro winst. Als de som van de ogen niet in H ligt, krijg je niks en heb je een winst van -1 euro. Als je wedt dat de uitkomst 'laag' is, krijg je 2 euro als de som van de ogen in de verzameling $L = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ligt en anders krijg je niks. Als je tenslotte wedt dat de uitkomst 'zeven' is, krijg je 5 euro als de som van de ogen precies gelijk is aan 7 (je hebt dan een winst van 4 euro) en anders krijg je niks (en heb je een winst van -1 euro).

(a) (3 punten) Marieke betaalt 1 euro en wedt op 'hoog'. We schrijven W_1 voor de winst die Marieke maakt. Laat zien dat $E(W_1) = -\frac{1}{6}$ en dat $\text{Var}(W_1) = \frac{35}{36}$.

(b) (3 punten) Jan betaalt 1 euro en wedt op 'zeven'. We noteren zijn winst met W_2 . Teken de cumulatieve verdelingsfunctie van W_2 .

(c) (4 punten) Annemarie besluit dit spel 180 keer te gaan spelen en iedere keer

op 'hoog' te wedden. We schrijven X_i voor haar winst bij het i de spelletje, $i \in \{1, \dots, 180\}$. Je mag er van uit gaan dat de X_i 's onafhankelijk zijn. Geef met behulp van de ongelijkheid van Chebychev een bovengrens voor

$$P(X_1 + \dots + X_{180} \leq -50).$$

4. Laat X een continue stochast zijn met dichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{4x^3}{15} & \text{als } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) (3 punten) Toon aan dat f_X een dichtheidsfunctie is.
- (b) (3 punten) Bereken de dichtheidsfunctie van $Y = e^X$.

5. De stochasten X_1 , X_2 en X_3 zijn onafhankelijk en alledrie normaal verdeeld met $E(X_i) = \frac{1}{4}$ en $\text{Var}(X_i) = \frac{1}{16}$ voor $i \in \{1, 2, 3\}$.

- (a) (4 punten) Bereken met behulp van Tabel 5.1 (zie bijlage) de kans dat tenminste twee van deze stochasten positief zijn.
- (b) (3 punten) Bereken de constante d zodanig dat

$$P(3X_1 - 7 \leq d) = \frac{1}{2}$$

6. Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{als } 0 \leq x \leq 1 \text{ en } x^2 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) (3 punten) Laat zien dat de marginale dichtheidsfuncties van X en Y gegeven worden door

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2) & \text{als } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

en

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{y} & \text{als } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (b) (3 punten) Bereken de cumulatieve verdelingsfunctie van X .
- (c) (3 punten) Bereken de variantie van Y .
- (d) (3 punten) Zijn X en Y onafhankelijk? Licht je antwoord toe.

Kansrekening I voor BWI

[illegible]