Beknopte uitwerking tentamen Kansrekening I, 17 april 1998

1\. (i). Hom. kansruimte met $\Omega = \{\{x_1, x_2\} : x_1, x_2 \in V \text{ versch.}\}$, dus $\#(\Omega) = \binom{9}{2} = 36$.
Dan $\mathbb{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \binom{3}{1}\binom{6}{1}/36 = \frac{1}{2}$, analoog $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, en $\mathbb{P}(A \cap B) =$
$= \binom{3}{1}\binom{3}{1}/36 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$: A en B onafhankelijk.

(ii). $\mathbb{P}(I : f100 \text{ bij } k\text{-de herh.}) = \mathbb{P}((A_1 \cup B_1)^c \cap \dots \cap (A_{k-1} \cup B_{k-1})^c \cap (A_k \cap B_k^c)) \overset{\text{onafh. herh.}}{=}$
$= \{\mathbb{P}((A \cup B)^c)\}^{k-1}\, \mathbb{P}(A \cap B^c) = \{\mathbb{P}(A^c \cap B^c)\}^{k-1}\, \mathbb{P}(A \cap B^c) \overset{\text{onafh. heid } A \text{ en } B}{=}$
$= \{\mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B^c)\}^{k-1}\, \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B^c) = (\frac{1}{2})^{2k}$.

(iii). $\mathbb{P}(I : f100) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(I : f100 \text{ bij } k\text{-de herh.}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^k = \frac{1}{3}$.

(iv). Zij $Y :=$ # guldens van I : $\in \{0, 50, 100\}$, met $\mathbb{P}(Y = 100) = \frac{1}{3}$ en (symmetrie)
$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(\text{II alles}) = \frac{1}{3}$, dus $\mathbb{P}(Y = 50) = \frac{1}{3}$. Aldus is $\mathbb{E}Y = 50 \cdot \frac{1}{3} + 100 \cdot \frac{1}{3} = 50$.

2\. (i). Voor $x \in (0,1)$: $F(x) = \int_0^x \lambda t^{\lambda - 1}\, dt = x^\lambda$. Daar $\lim_{x \uparrow 1} F(x) = 1$, is f kansdichtheid.

(ii). $\mathbb{E}X^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2 \cdot \lambda x^{\lambda - 1}\, dx = \int_0^1 \lambda x^{\lambda + 1}\, dx = \frac{\lambda}{\lambda + 2}$.

(iii). $\mathbb{P}(X \leq ab \mid X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq ab) / \mathbb{P}(X \leq b) = F(ab)/F(b) = (ab)^\lambda / b^\lambda = a^\lambda = \mathbb{P}(X \leq a)$.

(iv). Voor $x \in (0,1)$: $F_{U^{1/\lambda}}(x) = \mathbb{P}(U^{1/\lambda} \leq x) = \mathbb{P}(U \leq x^\lambda) = F_U(x^\lambda) = x^\lambda = F_X(x)$: $U^{1/\lambda} \overset{d}{=} X$.

3\. (i). Hom. kansruimte met $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in V \text{ versch.}\}$, dus $\#(\Omega) = 9 \cdot 8 \cdot 7$.
Dan $\mathbb{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{84}$.

(ii). Zij $X :=$ # keren A bij 12 herh.: bin $(n = 12, p = \frac{1}{84})$ verdeeld, dus: gevr. kans $=$
$= \mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - (\frac{83}{84})^{12} - 12 \cdot \frac{1}{84} \cdot (\frac{83}{84})^{11}$. Neem Y Poisson $(\lambda = np = \frac{1}{7})$-verdeeld; daar p klein, is $\mathbb{P}(X \geq 2) \approx \mathbb{P}(Y \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 1) = 1 - \frac{8}{7} e^{-1/7}$.

(iii). Zij $Z :=$ # benodigde herh.: geom $(p = \frac{1}{84})$ verdeeld, dus: $\mathbb{P}(Z = k) = p(1-p)^{k-1} =$
$= \frac{1}{84} (\frac{83}{84})^{k-1}$ voor $k \in \mathbb{N}$.

4\. (i). Zij $D := \{\text{dordige mij gekozen}\}$, dan $(X \mid D)$ bin$(3, 2p)$ en $(X \mid D^c)$ bin$(3, p)$ verd.
Aldus is $\mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - \{\mathbb{P}(X = 3 \mid D)\, \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(X = 3 \mid D^c)\, \mathbb{P}(D^c)\} =$
$= 1 - \{(2p)^3 \cdot \frac{3}{5} + p^3 \cdot \frac{2}{5}\} = 1 - \frac{26}{5} p^3$.

(ii). Gevr. kans $= \mathbb{P}(D \mid X \leq 2) = \mathbb{P}(X \leq 2 \mid D)\, \mathbb{P}(D) / \mathbb{P}(X \leq 2) = \frac{\{1 - (2p)^3\} \cdot \frac{3}{5}}{1 - \frac{26}{5} p^3} = \frac{3 - 24p^3}{5 - 26p^3}$.

(iii). $Y = 1000 + 250 \cdot X$, dus $\mathbb{E}Y = 1000 + 250 \cdot \mathbb{E}X$. Als $p = \frac{1}{10}$, dan is :
$\mathbb{E}X = \mathbb{E}(X \mid D)\, \mathbb{P}(D) + \mathbb{E}(X \mid D^c)\, \mathbb{P}(D^c) = 3 \cdot 2p \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot p \cdot \frac{2}{5} = \frac{24}{5} p = \frac{12}{25}$,