Beknopte uitwerking tentamen Kansrekening I, 27 januari 1998

1\. (i). $\Omega = (0,1)$, en voor $A \subset \Omega$: $\mathbb{P}(A)$ = lengte van A.

(ii). $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Neem bijv. $A_1 = (0, \frac{1}{2})$ en $A_2 = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}((\frac{1}{4}, \frac{1}{2})) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_2)$.

(iii). Gevr. kans $= \mathbb{P}((0, \frac{1}{100}) \cup (\frac{99}{100}, 1)) = \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{1}{50}$.

(iv). Zij $Y := \#$ getallen $< \frac{1}{100}$ of $> \frac{99}{100}$: bin$(n=100, p=\frac{1}{50})$ verdeeld. Aldus is $\alpha = \mathbb{P}(Y \geq 3) =$
$= \sum_{k=3}^{100} \binom{100}{k} (\frac{1}{50})^k (\frac{49}{50})^{100-k}$. Zij Z Poisson(λ) verdeeld met $\lambda := np = 2$;
daar p klein, is $\alpha = \mathbb{P}(Y \geq 3) \approx \mathbb{P}(Z \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 2) = 1 - 5e^{-2}$.

2\. (i). $1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = c \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^6}\,dx = -\frac{c}{5}(1+x)^{-5}\Big]_0^\infty = \frac{c}{5}$, dus: $c = 5$.

Voor $a \leq 0$: $F(a) = 0$. Voor $a > 0$: $F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \int_0^a \frac{5}{(1+x)^6}\,dx = 1 - \frac{1}{(1+a)^5}$.

(ii). Voor $k \in \{1, \ldots, 4\}$: $\mathbb{E}(1+X)^k = \int_0^\infty (1+x)^k \frac{5}{(1+x)^6}\,dx = 5\int_0^\infty (1+x)^{k-6}\,dx = \frac{5}{5-k}$.

(iii). $\mathbb{E}Y = 2\,\mathbb{E}(1+X)^2 + 8 = 2 \cdot \frac{5}{3} + 8 = \frac{34}{3}$, $\mathrm{Var}\,Y = 4\,\mathrm{Var}\,(1+X)^2 =$
$= 4\{\mathbb{E}(1+X)^4 - [\mathbb{E}(1+X)^2]^2\} = 4\{5 - (\frac{5}{3})^2\} = \frac{80}{9}$.

(iv). Gevr. kans $= \mathbb{P}(Y > 40) = \mathbb{P}((1+X)^2 > 16) = \mathbb{P}(|1+X| > 4) = \mathbb{P}(X > 3) =$
$= 1 - F_X(3) = 1 - (1 - 1/4^5) = (\frac{1}{2})^{10}$.

3\. Zij $X := \#$ keren 'kruis' bij 1 worp met de 7 guldens, en $A := \{X \in \{1,2,3,4\}\}$.

(i). Daar X bin$(n=7, p=\frac{1}{2})$, is gevr. kans $= \mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{4} \binom{7}{i} (\frac{1}{2})^7 = \frac{49}{64}$.

(ii). $Y = \#$ herhalingen nodig voor A, dus: Y is geom(p) verdeeld met $p := \mathbb{P}(A)$.
Gevolg: $\mathbb{P}(Y=n) = p(1-p)^{n-1} = \frac{49}{64}(\frac{15}{64})^{n-1}$ voor $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}Y = \frac{1}{p} = \frac{64}{49}$.

(iii). Wegens geheugenloosheid en 'staartkans': $\mathbb{P}(Y > 5 \mid Y > 3) = \mathbb{P}(Y > 2) = (1-p)^2 = (\frac{15}{64})^2$.

(iv). Zij $B := \{$bedrag van f1$\}$, dan: $\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(B \cap \{Y=n\}) =$ (in vdhl. notatie)
$= \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap \{X_n = 1\}) = \sum_{n=1}^\infty (1-p)^{n-1}\,\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{p} \cdot \frac{7}{128} = \frac{1}{14}$.

4\. (i). $Y_n \in \{n-1, n\}$. Neem hom. model met $\Omega := \{$combinaties van n uit $7\}$, $\#(\Omega) = \binom{7}{n}$.
Dan: $\mathbb{P}(Y_n = n-1) = \binom{6}{n-1}\binom{1}{1} / \binom{7}{n} = \frac{1}{7}n$.

(ii). $\mathbb{P}(D_n) = \frac{1}{6}$, en $(X \mid D_n) \overset{d}{=} Y_n$, dus $\mathbb{P}(X = n-1 \mid D_n) = \frac{1}{7}n$ en $\mathbb{P}(X = n \mid D_n) = 1 - \frac{1}{7}n$.

(iii). $\mathbb{E}(X \mid D_n) = \mathbb{E}Y_n = (n-1) \cdot \frac{1}{7}n + n \cdot (1 - \frac{1}{7}n) = \frac{6}{7}n$, dus: $\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{6} \mathbb{E}(X \mid D_n)\,\mathbb{P}(D_n) =$
$= \sum_{n=1}^6 \frac{6}{7}n \cdot \frac{1}{6} = 3$.

(iv). Zij $A := \{$alle ballen uit$\}$, dan $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^6 \mathbb{P}(A \cap D_n) = \sum_{n=1}^6 \mathbb{P}(\{X=n\} \cap D_n) =$
$= \sum_{n=1}^6 \mathbb{P}(X=n \mid D_n)\,\mathbb{P}(D_n) = \sum_{n=1}^6 (1 - \frac{1}{7}n)\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

(v). Gevr. kans $= \mathbb{P}(D_6 \mid A) = \mathbb{P}(X=6 \mid D_6)\,\mathbb{P}(D_6) / \mathbb{P}(A) = (1 - \frac{6}{7})\frac{1}{6} / \frac{1}{2} = \frac{1}{21}$.