

# Exam introduction to image processing

## December 23<sup>rd</sup>, 2010

MF-G513 from 15.15 to 18.00

Please return forms with questions together with your answers to supervisor  
Do not take them outside of the exam room

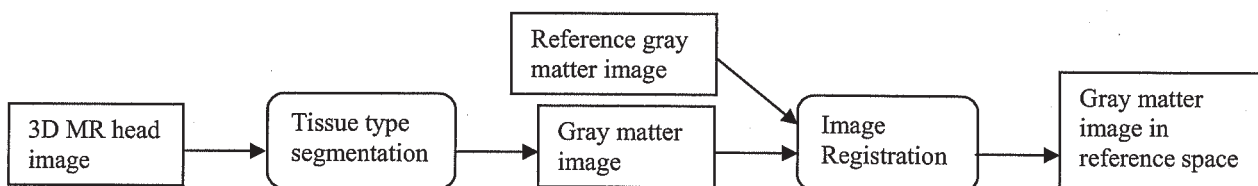
A Dutch translation of these questions is present at the second half of this package

The total number of points to be earned is: 36.  
Marks are calculated as  $1 + (\text{number of points})/4$ .

### Question 1.

(Total: 9 points)

The scheme in the figure is a flow chart for the image processing part of the “Voxel-based morphometry” method. This method consists of taking an individual MR image of the head of a person, performing tissue type segmentation, and transforming the image of the tissue of interest to a reference space. The tissue of interest is most commonly the grey matter of the brain, and the tissue type segmentation yields a quantitative assessment of the amount of gray matter present in each voxel. The reason for transforming this image to a reference space, is that this allows statistical comparisons across groups of subjects or patients. We are concerned here with the image processing parts, and will disregard these statistical analysis steps.



The tissue type segmentation is based on an analysis of the image intensity histogram.

a. (1 point)

Give a reason why it is better to perform the tissue type segmentation step *before* the registration to the reference image.

Suppose we use a linear image registration method in the “Image Registration” step.  
For registration of 2-dimensional images, the transformation due to a linear registration can be expressed as:

$$x' = a_{11}.x + a_{12}.y + t_x \quad (\text{Eqn. 1a})$$

$$y' = a_{21}.x + a_{22}.y + t_y \quad (\text{Eqn. 1b})$$

b. (1 point)

What is the meaning of the parameters  $t_x$  and  $t_y$  in Equations 1a and 1b?

c. (2 points)

Use vectors and matrices to write down, for registration of 3-dimensional images, the corresponding expression to Equations 1a and 1b. Explain the terms in your expression.

To find the transformation that produces the best match, we evaluate a cost function at each proposed combination of parameters. The chosen cost function is:

$$\text{Sqdiff} = (\text{image} - \text{refimage})^2;$$

The algorithm used to find the optimum transformation searches the space of possible parameter values, and at each iteration narrows the range in which the optimum is to be found. Therefore, as the algorithm gets closer to the optimum, the parameter differences get smaller.

Suppose that we are restricted to two types of interpolation: tri-linear interpolation, and nearest neighbour interpolation, and that we can choose which interpolation method to use. Moreover, if we want to, we can use one interpolation method for the initial stages of the algorithm (until the parameter search is suitably restricted, which is tested using a sensible criterion), and a different interpolation method for the later stages.

d. (2 points)

Indicate, for each of the two stages, which interpolation method you would choose, and provide at least one reason for each choice.

e. (1 point)

How would you inspect the quality of the registration result?

We want to study a particular disease in which patients develop, in addition to the atrophy of the gray matter, lesions in the white matter. In our images, these lesions have signal intensities in the same range as that of the gray matter.

f. (2 points)

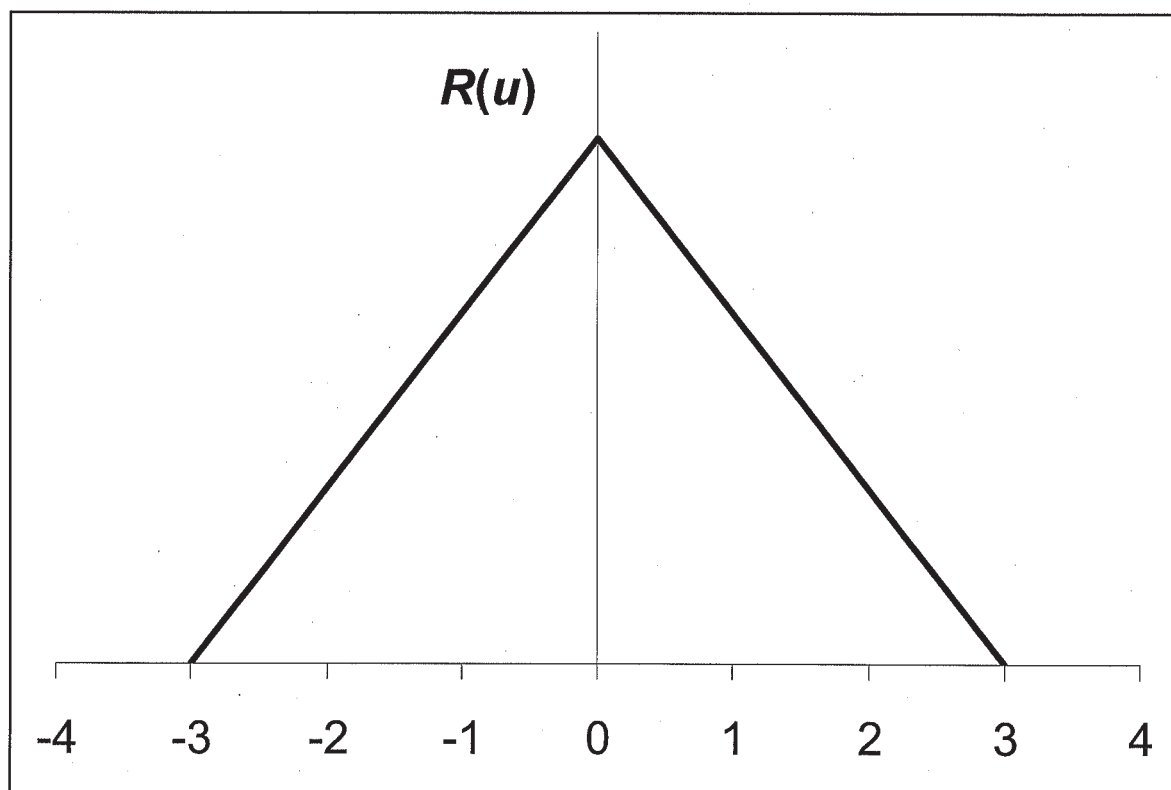
Give two ways in which these lesions will affect the described procedure, and explain how they affect it.

## Question 2.

(Total: 9 points)

Consider the piecewise linear interpolation scheme in the figure below. The horizontal axis displays the value of  $u$ , which is the position relative to the new pixel position, measured in units of pixel width. The function goes to zero at  $u=3$  and  $u=-3$ :  $R(3)=R(-3)=0$ .  $R(u)$  is also 0 outside the interval  $[-3,3]$ . The value of  $R(u)$  at  $u=0$  is discussed later in this problem.

We first consider a 1-dimensional image and 1-dimensional interpolation, using this interpolation scheme. We have pixel intensity data for the discrete points at integer multiples of the pixel width, and wish to find the interpolated intensity at a new pixel position  $x=x_I$ , where  $x_I$  is not an integer multiple of the pixel width.



a. (1 point)

Sketch the figure above in modified form to reflect the interpolation of the new pixel at  $x_I$ . Indicate where the existing pixels are located, as well as where the new pixel is located.

b. (2 points)

Write down a general expression for the interpolated intensity at  $x_I$  using this interpolation scheme.

With the information above, the function  $R(u)$  is not yet completely defined. The values of  $R(u)$  are scaled by our choice of the value of  $R$  for  $u=0$ .

c. (1 point)

Why is  $R(0)=1$  not a good choice?

d. (1 point)

Give a better choice for  $R(0)$  and explain why this is a good choice.

We now want to apply interpolation to 2-dimensional images with square pixels, i.e., the width of a pixel is equal to its height. The interpolation scheme in the figure above is applied

10.100.500

successively in the x and y directions to find the interpolated intensity of a new pixel at  $(x_I, y_I)$ . The new pixel does not lie on grid lines of the existing image.

e. (2 points)

Sketch the grid of the existing 2-D image with square pixels, with the new pixel at  $(x_I, y_I)$ . Indicate in your drawing how the successive interpolation in the x and y directions can be performed. Clearly explain in words what you have drawn and why.

Suppose we are trying to match two images by rotating one of them by different angles and evaluating a cost function.

f. (2 points)

Name 2 disadvantages of the above interpolation scheme for image matching.

### Question 3.

(Total: 9 points)

a. (3 points)

Give a precise description of a morphological closing operator for binary images.

b. (3 points)

Give a brief description of the distance transform. Where is it used for?

c. (3 points)

What is the mathematical relation between a local max operator and a gray scale dilatation? Explain.

### Question 4.

(Total: 9 points)

This question concerns the computation of connected components.

a. (3 points)

Give a definition of the term "connected components" in the field of image processing.

b. (3 points)

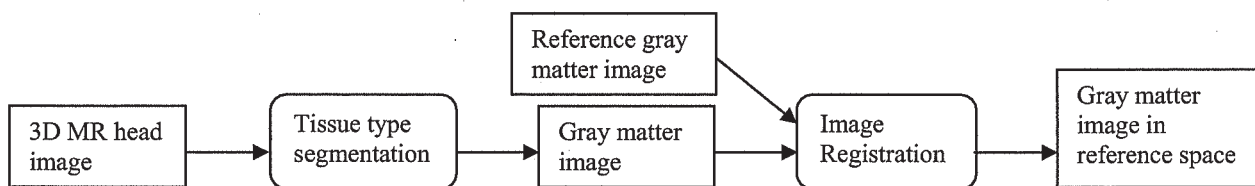
Give a description of an algorithm to compute "connected components" using morphological filters.

c. (3 points)

Give an advantage and a disadvantage of this algorithm (from b), compared to the use of equivalence classes.

**Vraag 1.**  
(Totaal: 9 punten)

In het schema hieronder staat een “flow chart” geschetst van de methode genaamd “Voxel-based morphometry”. Bij deze methode wordt een MR opname gemaakt van het hoofd, vervolgens wordt een weefseltype segmentatie gemaakt, en wordt het gedeelte van het gesegmenteerde beeld waar we in geïnteresseerd zijn naar een referentieruimte getransformeerd. We zijn meestal geïnteresseerd in de grijze stof van het brein en de weefseltype segmentatie geeft inzicht in de hoeveelheid grijze stof in elk voxel. De reden om het beeld naar de referentieruimte te transformeren is dat dit het mogelijk maakt om statistische vergelijkingen te maken tussen verschillen groepen patiënten en controles. In deze tentamenvraag beperken we ons tot de beeldbewerkingaspecten van “Voxel-based morphometry” en laten we de statistische analyse buiten beschouwing.



De weefseltype segmentatie is gebaseerd op een analyse van het beeldhistogram.

a. (1 punt)

Geef een reden waarom het beter is om de weefseltype segmentatie stap uit te voeren voor de transformatie naar het referentie beeld.

Neem aan dat een lineaire beeldregistratie methode gebruikt wordt in de “Image Registration” stap. In het geval van 2D-beelden kan de transformatie uitgedrukt worden als:

$$x' = a_{11}.x + a_{12}.y + t_x \quad (\text{Verg. 1a})$$

$$y' = a_{21}.x + a_{22}.y + t_y \quad (\text{Verg. 1b})$$

b. (1 punt)

Wat is de betekenis van de parameters  $t_x$  and  $t_y$  in vergelijkingen 1a en 1b?

c. (2 punten)

Gebruik vectoren en matrices om de beeldregistratie transformatie op te schrijven voor 3D beelden, analoog aan verg (1). Verklaar de termen in je wiskundige uitdrukking.

Om de optimale transformatie te vinden wordt een kostenfunctie uitgerekend, voor elke combinatie van transformatie parameters. De gekozen kostenfunctie is:

$$Sqdiff = (\text{image} - \text{refimage})^2;$$

Het algoritme om de optimale transformatie te vinden doorzoekt de ruimte van alle mogelijke parameterwaarden en bij elke volgende iteratie worden steeds kleinere stappen genomen. Neem aan dat we slechts de keuze hebben tussen twee types beeldinterpolatie: de tri-lineaire

en de “nearest neighbor” interpolatie. We kunnen het algoritme zo ontwerpen dat we het ene type interpolatie aan het begin kiezen en het andere type in het eindstadium het algoritme

d. (2 punten)

Geef aan, voor zowel het beginstadium als het eindstadium welke interpolatie methode je zou kiezen en geef minstens één argument voor je keuze.

e. (1 punt)

Hoe zou je visueel de kwaliteit van het eindresultaat van de beeldregistratie controleren?

We willen een bepaalde ziekte bestuderen waarbij de patiënten, behalve atrofie (krimpen) van de grijze stof, ook beschadigingen van de witte stof ontwikkelen. In onze beelden hebben de witte stofbeschadigingen een signaal intensiteit in dezelfde range als de grijze stof.

f. (2 punten)

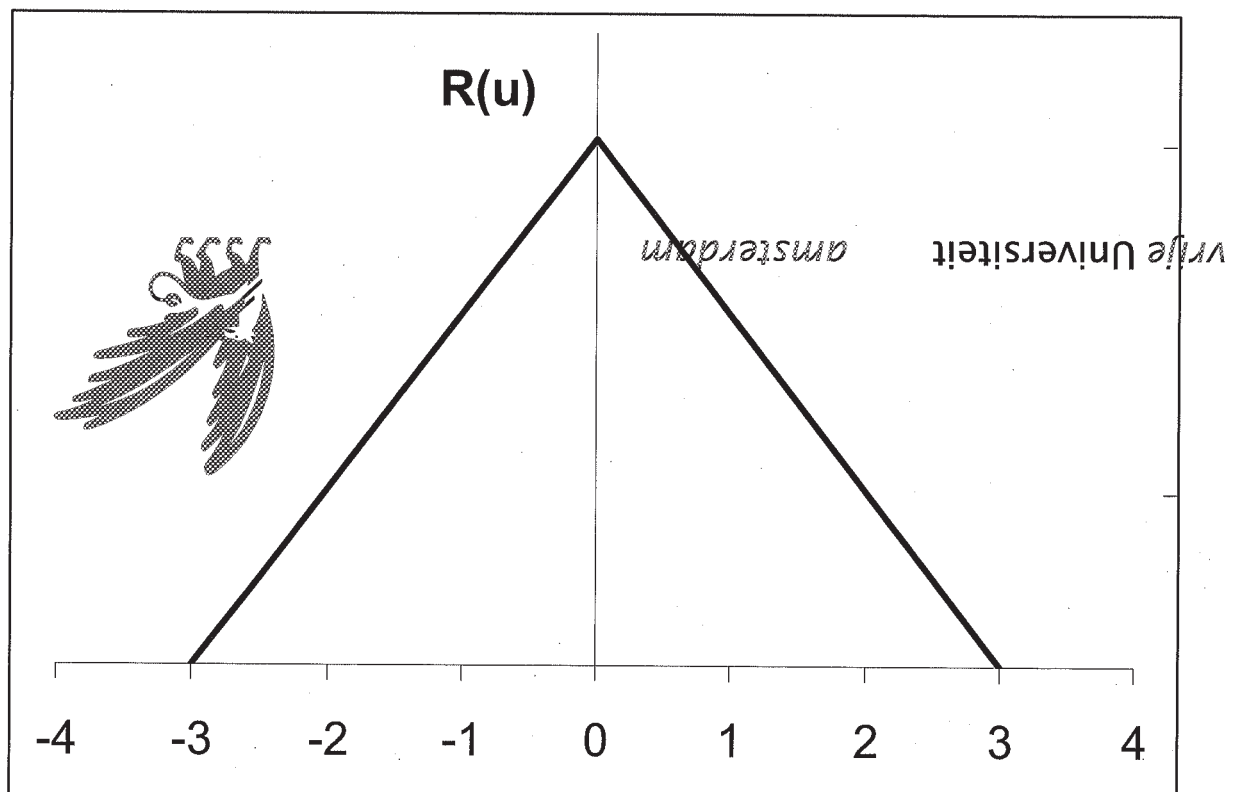
Geef twee redenen waarom deze beschadigingen de bovengenoemde procedure beïnvloeden en leg uit hoe beïnvloeding werkt.

## Vraag 2.

(Totaal: 9 punten)

Beschouw het stuksgewijze lineaire interpolatie schema in de figuur hieronder. Op de horizontale as staat de waarde van  $u$ , de positie het nieuwe pixel gemeten in pixelgrootte. De functie gaat naar 0 bij  $u=3$  en  $u=-3$ :  $R(3)=R(-3)=0$ . De functie  $R(u)$  is ook 0 voor  $u$  buiten het interval  $[-3,3]$ . De waarde van  $R(u)$  voor  $u=0$  zal verderop ter sprake komen.

We beschouwen eerst een 1D beeld en een 1D interpolatie, gebruik makend van onderstaand schema. We hebben pixel intensiteitsgegevens op discrete punten op gehele veelvouden van



de pixelgrootte en willen de geïnterpoleerde waarden weten op een nieuw pixel op  $x=x_I$ , waarbij  $x_I$  niet een geheel veelvoud van de pixelgrootte is.

a. (1 punt)

Teken een aangepaste versie van bovenstaand interpolatieschema waarin je de interpolatie van het nieuwe pixel  $x_I$  aangeeft. Geef in je tekening aan waar de input pixels zijn en ook de waar het punt  $x_I$  zit.

b. (2 punten)

Geef een algemene uitdrukking voor de geïnterpoleerde waarde op  $x_I$ , passend bij dit interpolatieschema.

Met bovenstaande informatie is de functie  $R(u)$  nog niet volledig gedefinieerd. De waarden van  $R(u)$  worden geschaald door de keuze van de waarde  $R()$  op  $u=0$ .

c. (1 punt)

Waarom is  $R(0)=1$  geen goede keuze?

d. (1 punt)

Geef een betere keuze voor  $R(0)$  en leg uit waarom dit beter is.

We willen nu 2D beelden interpoleren met vierkante pixels (d.w.z. even breed als lang). Het bovenstaande interpolatie schema wordt achtereenvolgens in de  $x$ - en  $y$ -richting toegepast om de geïnterpoleerde waarde op het nieuwe punt  $(x_I, y_I)$  te vinden. Het nieuwe pixel ligt niet op de gridlijnen van het inputbeeld.

e. (2 punten)

Schets het grid van het 2D input beeld met vierkante pixels en het nieuwe pixel op  $(x_I, y_I)$ . Geef in je tekening aan hoe de achtereenvolgende interpolaties in  $x$ - en  $y$ -richting uitgevoerd kunnen worden. Leg duidelijk uit wat je hebt getekend en waarom.

Stel dat men twee 2D beelden op elkaar passen door de ene over verschillende hoeken te draaien en een kostenfunctie uit te rekenen.

f. (2 punten)

Geef twee nadelen van het bovenstaande interpolatieschema voor beeldmatching.

**Vraag 3.**

(Totaal: 9 punten)

- a. (3 punten)  
Geef een precieze beschrijving van een “morphological closing operator” voor binaire beelden.
- b. (3 punten)  
Geef een korte beschrijving van de “afstandstransformatie”. Waar wordt deze voor gebruikt?
- c. (3 punten)  
Wat is het wiskundige verband tussen een “local max operator” en een “gray scale dilatation”? Leg uit.

**Vraag 4.**

(Totaal: 9 punten)

Deze vraag betreft het bepalen het verbonden onderdelen “connected components”.

- a. (3 punten)  
Geef een definitie van de term “connected components” in de context van beeldbewerking.
- b. (3 punten)  
Geef een beschrijving van een algoritme om “connected components” te bepalen, gebruikmakend van morfologische filters.
- c. (3 punten)  
Geef een voordeel en een nadeel van dit algoritme (van vraag b), vergeleken met het algoritme dat van equivalentieklassen gebruikmaakt.



amsterdam vrije Universiteit