

**Gebruik van rekenmachine, dictaat of aantekeningen is niet toegestaan**

1. We beschouwen  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ , de vectorruimte van polynomen van de graad ten hoogste 2 in de (reële) variabele  $t$  en met complexe coëfficiënten. Voor twee polynomen  $p, q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  definiëren we

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 t p(t) \overline{q(t)} dt.$$

- a) Toon aan dat  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  een inproduct op  $V$  definieert.

Beschouw de deelruimte  $V \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  gegeven door  $V = \text{span} \{ \sqrt{2}, 6t - 4 \}$ .

- b) Toon aan dat  $\mathcal{B} = \{ \sqrt{2}, 6t - 4 \}$  een orthonormale basis is voor  $V$ .  
c) Bereken de orthogonale projectie van  $t^2$  op  $V$ .

2. Laat  $V$  een  $n$ -dimensionale vectorruimte zijn. Gegeven zijn een tweetal lineaire afbeeldingen  $A : V \rightarrow V$  en  $B : V \rightarrow V$ . De lineaire afbeelding  $T : V \rightarrow V$  definiëren we vervolgens door  $T(x) := A(x) + B(x)$ , voor alle  $x \in V$ . Verder is gegeven dat  $\dim \text{Im } A + \dim \text{Im } B = n$  en dat  $T$  inverteerbaar is.

- a) Toon aan dat  $\text{Ker } A \cap \text{Ker } B = \{0\}$ .  
b) Toon aan dat  $\dim \text{Ker } A + \dim \text{Ker } B = n$  en leid hieruit af dat  $V = \text{Ker } A \oplus \text{Ker } B$ .

We definiëren vervolgens de lineaire afbeelding  $P = T^{-1}A$ .

- c) Toon aan dat  $Px = 0$  als en alleen als  $x \in \text{Ker } A$ .  
d) Toon aan dat  $Px = x$  als en alleen als  $x \in \text{Ker } B$ .  
e) **Bonusopgave:**

Toon aan dat  $P$  een projectie van  $V$  op  $\text{Ker } B$  langs  $\text{Ker } A$  is.

3. Laat  $U$  een unitaire operator zijn op de unitaire ruimte  $V = \mathbb{C}^n$ . Laat  $Uv = \lambda v$  met  $v \neq 0, v \in V$  en  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

- a) Toon aan dat  $|\lambda| = 1$ .  
b) Toon aan dat  $\lambda^{-1}$  een eigenwaarde is van  $U^*$ .  
c) Laat  $Uw = \mu w$  met  $\mu \in \mathbb{C}$ . Toon aan: als  $\lambda \neq \mu$  dan geldt  $\langle v, w \rangle = 0$ .  
d) Laat  $\langle z, v \rangle = 0$ . Toon aan:  $\langle Uz, v \rangle = 0$  en  $\langle U^*z, v \rangle = 0$ .

4. Zij  $\mathbb{R}^2$  voorzien van het standaard inproduct en zij de basis  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .  
Van de operator  $T$  weten we dat de matrix ten opzichte van de basis  $\mathcal{B}$  gegeven wordt door

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ga na of de operator  $T$  symmetrisch is.

5. Laat  $B$  de matrix zijn gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een nilpotente matrix  $N$  en een diagonaliseerbare matrix  $S$  zodanig dat  $B = N + S$ , waarbij  $NS = SN$ .

### Normering:

|          |          |          |       |       |
|----------|----------|----------|-------|-------|
| 1 : a) 3 | 2 : a) 2 | 3 : a) 3 | 4 : 3 | 5 : 6 |
| b) 3     | b) 3     | b) 2     |       |       |
| c) 2     | c) 2     | c) 3     |       |       |
|          | d) 2     | d) 2     |       |       |
|          | e) 3     |          |       |       |
| _____    | _____    | _____    | _____ | _____ |
| 8        | 12       | 10       | 3     | 6     |

$$\text{Eindcijfer} = \min \left\{ 10, \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1 \right\}$$