

Gebruik van rekenmachine, boek of aantekeningen is niet toegestaan

1. De matrix A is gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal de rang van A en geef een basis voor de rijruimte van A .
- b) Geef de dimensie van en een basis voor $(\text{Row}(A))^\perp$, het orthogonale complement van de rijruimte van A .

2. De reële 3×3 matrix B en de complexe vector $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ zijn gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - i \\ -1 + i \end{pmatrix}.$$

- a) Toon aan dat $\mathbf{v}$ een eigenvector is van B en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.
- b) Bepaal de overige eigenwaarde(n) van B en geef een basis voor de bijbehorende eigenruimte(n).

3. De deelruimte $V \subset \mathbb{R}^4$ wordt opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal, m.b.v. het Gram-Schmidt proces, een orthonormale basis voor V .
- b) Gegeven is de vector $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$. Bepaal de afstand van $\mathbf{y}$ tot V .

Z.O.Z.

4. Bepaal de lijn $y = a + bx$, die in kleinste-kwadraten zin de beste fit geeft bij de volgende set datapunten:

$$(-2, 4), (-1, 3), (0, 1), (1, 0) \text{ en } (2, -2).$$

5. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- a) Laat A een 5×4 matrix zijn met rang 4. Als $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ dan is $A\mathbf{x} \neq A\mathbf{y}$.
- b) Laat A een diagonaliseerbare $n \times n$ matrix zijn. Als B gelijkvormig (similar) is met A , dan is B ook diagonaliseerbaar.
- c) Laat $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ een eenheidsvector zijn. Definieer $Q = I_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$. Dan is Q een orthogonale matrix.
- d) De kwadratische vorm $Q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz$ is positief definit.

6. $\mathbb{P}_2$ is de vectorruimte van polynomen van graad maximaal 2, inclusief het nulpolynoom. We definiëren voor $p, q \in \mathbb{P}_2$

$$\langle p, q \rangle := p(-1)q(-1) + 2p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- a) Bewijs dat $\langle p, q \rangle$ een inproduct op $\mathbb{P}_2$ definieert.
- b) Toon aan dat de verzameling $\mathcal{B} = \{1, t, 2t^2 - 1\}$ een orthogonale basis is voor $\mathbb{P}_2$ t.o.v. het gegeven inproduct.

We definiëren vervolgens de lineaire transformatie $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ als de afbeelding die een polynoom $\mathbf{p}(t)$ afbeeldt op $(1+t)\mathbf{p}'(t)$. [N.B. $\mathbf{p}'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{p}(t)$.]

- c) Bepaal $[T]_{\mathcal{B}}$, de matrix representatie van T t.o.v. de basis $\mathcal{B}$.

Normering:

1 : a) 3	2 : a) 1	3 : a) 5	4 : 6	5 : 10	6 : a) 2
b) 3	b) 5	b) 4			b) 3
					c) 3
6	6	9	6	10	8

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$