

Tweede deeltentamen Kansrekening 2

23 mei 2014, 15.15-17.15

- Dit tentamen bestaat uit zes opgaven en een bijlage. Er zijn 36 punten te behalen. Het cijfer wordt gegeven door $(4 + \text{aantal punten})/4$.
- Het gebruik van een eenvoudige rekenmachine is toegestaan, dit mag geen grafische of programmeerbare rekenmachine zijn.
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden.
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. In deze opgave mag je gebruiken dat voor $|t| < 1$ geldt dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{(1-t)} \text{ en } \sum_{n=1}^{\infty} nt^n = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Laat X en Y discrete stochasten zijn met gezamenlijke kansmassafunctie

$$p_{(X,Y)}(x,y) = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{xy+1}, \text{ voor } x \in \{1, 2\} \text{ en } y \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

- (a) [3 punten] Laat zien dat $P(X = 1) = \frac{3}{5}$.
(b) [4 punten] Laat zien dat $E(Y|X = 1) = 1$ en dat $E(Y|X = 2) = \frac{1}{3}$.
(c) [2 punten] Gebruik de resultaten uit de vorige twee onderdelen om $E(Y)$ te berekenen.

2. [3 punten] In een restaurant zit een groep van 10 studenten aan een ronde tafel te eten. Ze bestellen allemaal een nagerecht en hebben daarbij de keuze uit 5 verschillende mogelijkheden. Iedere student kiest, onafhankelijk van de andere studenten, een willekeurig nagerecht (dus ieder mogelijk nagerecht heeft een kans van $\frac{1}{5}$ om gekozen te worden). Bereken het verwachte aantal studenten waarvoor geldt dat hij/zij en zijn of haar burens alledrie hetzelfde nagerecht kiezen.

3. Laat X en Y onafhankelijke continue stochasten zijn met respectievelijke dichtheidsfuncties

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

en

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y+4} & \text{als } y \geq 2, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) [4 punten] Bereken de dichtheid $f_Z(z)$ van de stochast $Z := X + Y$. Het is handig om bij de berekening onderscheid te maken tussen de situaties $z < 2$, $2 \leq z \leq 4$ en $z > 4$.

(b) [3 punten] Laat zien dat de momentgenererende functie van Y op haar domein gegeven wordt door

$$M_Y(t) = \frac{2e^{2t}}{2-t}.$$

Licht daarbij duidelijk toe wat het domein is van de functie $M_Y(t)$.

(c) [3 punten] Bereken $E(Y)$ met behulp van de in het vorige onderdeel berekende momentgenererende functie.

(d) [3 punten] In dit onderdeel mag je gebruiken dat de momentgenererende functie van een exponentieel verdeelde stochast met parameter $\lambda > 0$ gegeven wordt door $M(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t}$ als $t < \lambda$.

Laat met behulp van de momentgenererende functie van Y zien dat $2Y - 4$ exponentieel verdeeld is met parameter 1.

4. [4 punten] Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-y/x} & \text{als } 0 < x < 1 \text{ en } y \geq 0, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken $\text{Cov}(X, Y)$. Je mag daarbij zonder berekening gebruiken dat $E(Y) = \frac{2}{3}$.

Hint: Bedenk of de integratievolgorde die je hebt gekozen handig is.

5. [3 punten] Bij deze opgave heb je de bijlage nodig. De studieadviseur van de opleiding Business Analytics voert aan het begin van het studiejaar kennismakingsgesprekken met alle eerstejaars. Stel dat ze 84 gesprekken moet voeren en dat de lengten van deze gesprekken onafhankelijk en identiek verdeeld zijn met een verwachting van 18,3 minuten en een standaardafwijking van 4,5 minuten. Bereken de kans dat zij in totaal meer dan 26 uur bezig is met deze gesprekken.

6. [4 punten] Bij deze opgave heb je de bijlage nodig. Laat $X_1, X_2, \dots, X_{400}$ onafhankelijke identiek verdeelde continue stochasten zijn met $E(X_i) = \frac{3}{2}$ en $\text{Var}(X_i) = \frac{3}{4}$.

Gebruik een benadering gebaseerd op de centrale limietstelling om te berekenen voor welke waarde c geldt dat

$$P(600 - c \leq X_1 + \dots + X_{400} \leq 600 + c) \approx 0,90.$$

Bijlage: Cumulatieve distributiefunctie $\Phi(x)$ van de standaard normale verdeling

[illegible]