

Tentamen Analyse 1

12 juni 2014, 18.30-20.30

- Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven en een bijlage. Er zijn 36 punten te behalen (cijfer=(4+ aantal punten)/4).
- Het gebruik van rekenmachines is niet toegestaan.
- Geef een duidelijke toelichting bij de antwoorden!
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage op het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. [4 punten] Bereken welke functies $y(x)$ voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$y' + 10y = x.$$

2. [4 punten] Bereken de oplossing van het volgende beginwaardeprobleem:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 29y = 0 \\ y(0) = 5, y'(0) = -5. \end{cases}$$

3. [4 punten] Geef de algemene oplossing van de differentievergelijking

$$y_n - 4y_{n-1} - 5y_{n-2} = 3^n.$$

4. [4 punten] Van een complexe machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ is gegeven dat deze reeks convergent is voor $x = 3 + 4i$ en divergent voor $x = 6$. Geef voor elk van deze waarden $x = 5 - \sqrt{11}i$, $x = 7$ en $x = 1 + i$ aan of de machtreeks daar convergeert, divergeert of dat er geen uitspraak over de convergentie gedaan kan worden. Licht je antwoord duidelijk toe!

5. [4 punten] Bepaal met behulp van de tabel van Laplace getransformeerden voor welke functie $f(t)$ geldt dat de Laplace getransformeerde van f gelijk is aan

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{-2s - 2}{s^2 + 2s - 24}.$$

6. Laat $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$y'' - xy' - y = 0,$$

met beginwaarden $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$.

(a) [4 punten] Bereken a_0 en a_1 en laat zien dat voor $n \geq 0$ geldt dat

$$(n+2)a_{n+2} = a_n.$$

(b) [3 punten] Bereken de convergentiestraal van $y(x)$.

7. Laat f de 2π -periodieke functie zijn die op het interval $(-\pi, \pi]$ gegeven wordt door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } -\pi < x \leq 0, \\ x & \text{als } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) [5 punten] Laat zien dat de Fourierreeks van f gegeven wordt door

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos((2j+1)x)}{(2j+1)^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} \sin(jx)}{j}$$

(b) [2 punten] Bereken

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2},$$

geef aan welke stelling je daarbij gebruikt en waarom je die kunt gebruiken.

(c) [2 punten] Teken de grafiek van de Fourierreeks van f op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.

$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0$
$H_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$

Tabel 2.1: Tabel van functies met hun Laplace getransformeerden.