

Inleiding Wiskundige Economie (Volledig tentamen incl. Deel 2)

Dr. Rene van den Brink en Dr. Harold Houba

Belangrijk

Deelnemers die een vrijstelling voor Deel 1 hebben, kunnen volstaan met het maken van Deel 2 waarvoor een maximale tijdsduur van 1 uur en 30 minuten geldt. De overige deelnemers maken het volledige tentamen. De opgaven zijn onderverdeeld in een Deel 1 en Deel 2.

Datum: 8.45-11.30, 27 Mei, 2008.

Tijdsduur:

Alleen Deel II	Vragen 5 t/m 7,	maximaal 1 uur en 30 minuten.
Volledig tentamen	Alle vragen,	maximaal 2 uur en 45 minuten.

In geval van problemen: 020 598 6014, 1A-22.

Tentamenuitslag: Dinsdag 10 Juni, 2008.

Inzage: donderdag 19 Juni: 13.30-14.30, in 1A-22 of op afspraak bij verhindering.

Dit tentamen bevat 7 vragen en 7 paginas!

Deel 1

Vraag 1:* 4 items, totaal 16 punten,
Vraag 2:* 3 items, totaal 12 punten,
Vraag 3:* 3 items, totaal 12 punten,
Vraag 4:* 2 items, totaal 10 punten.

Deel 2

Vraag 5: 5 items, totaal 18 punten,
Vraag 6: 6 items, totaal 21 punten,
Vraag 7: 3 items, totaal 11 punten,

* Het maximum aantal punten per onderdeel in Deel 1 is 4, behalve onderdeel 4b (6pt).

Verhoog de score van je tentamen door eerst de vragen te beantwoorden die je het beste beheerst.

Veel succes!

Deel 1 van het tentamen Inleiding Wiskundige Economie, 27 Mei 2008

1. In deze vraag komen enkele basisbegrippen uit het boek van Varian, de Syllabus en/of het Hoorcollege aan de orde.

- (a) De Nederlands overheid als een van haar milieudoelstellingen om het aantal kilometers dat wordt gereden met auto's niet te laten toe nemen. Onlangs was in het nieuws dat zij overweegt per 2012 de BMP belasting op auto's af te schaffen en te vervangen door de zogenaamde kilometerheffing (ook wel rekeningrijden genaamd). De BMP is een vast bedrag aan belasting dat op de aanschafprijs van een auto wordt geheven. Gegeven is een consument met vraagfunctie $d(\underline{p}, m) = (\frac{m}{10p_1}, \frac{9m}{10p_2})^\top$, met goed 1 is de afstand gereden in de eigen auto (in tienduizend kilometers), goed 2 is de overige consumptie (in tienduizend euro's) en m is het *netto* jaarinkomen *na aftrek* van de jaarlijkse afschrijving op auto (in tienduizend euro's). Het jaarinkomen bedraagt 4, de prijs van goed 1 is 1 en de prijs van goed 2 is eveneens 1. De aanschafprijs van een auto is 2.5 inclusief de BMP van 0.5. De auto wordt in 5 jaar afgeschreven.

Geef het interval van prijzen p_1 inclusief rekeningrijden waarvoor de gereden afstand na de voorgestelde beleidswijziging ten hoogste gelijk is aan de huidige gereden afstand onder de aanname dat de overige parameters niet wijzigen.

- (b) Gegeven is $d(\underline{p}, m) = \left(\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}, \frac{m - \sqrt{p_1 p_2}}{p_2} \right)^\top$ met $m \geq \sqrt{p_1 p_2}$. Bepaal of goed 2 een substituuut of een complement is voor goed 1.
- (c) Geef de definitie van een homogene functie en bepaal hiermee voor welke a en b de functie $\frac{(p_1 p_2)^a \hat{u}^b}{(p_1 + p_2)^2}$ een uitgavenfunctie $e(\underline{p}, \hat{u})$ voorstelt. **Hint:** In welke parameters is $e(\underline{p}, \hat{u})$ homogeen van welke graad?

Stel we observeren tweemaal het keuzegedrag van een consument onder de veronderstelling dat deze een zwakke voorkeursrelatie heeft die volledig, transitief, continu, monotoon en strikt convex is. De eerste observatie is de keuze $\underline{x}^1 \in B(\underline{p}^1, m^1)$ bij de prijzen $\underline{p}^1$ en inkomen m^1 en de tweede observatie is de keuze $\underline{x}^2 \in B(\underline{p}^2, m^2)$ van een consument bij de prijzen $\underline{p}^2$ en inkomen m^2 .

- (d) Geef de definities van directe en indirecte gebleken voorkeur en bepaal of er sprake is van directe of indirecte gebleken voorkeur tussen $\underline{x}^2$ en $\underline{y}$ als ook nog bekend is dat $\underline{x}^1 \in B(\underline{p}^2, m^2)$, $\underline{x}^2 \notin B(\underline{p}^1, m^1)$ en $\underline{y}$ behoort tot $B(\underline{p}^1, m^1)$? Geef een duidelijke toelichting.

2. Gegeven is een zwakke voorkeursrelatie $\succeq$ op de goederenruimte $Q = \mathbb{R}_+^2$ met de volgende omschrijving: $\underline{x} \succeq \underline{y} \iff \min\{x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2\} > \min\{y_1 + 2y_2, 2y_1 + y_2\}$.

- (a) (2 pt) Teken de verzamelingen $W(\underline{\hat{y}})$, $I(\underline{\hat{y}})$, en $V(\underline{\hat{y}})$ in het punt $\underline{\hat{y}} = (1, 2)^\top$.
- (b) (6 pt) Aan welke van de eigenschappen Volledig, Transitief, Reflexief, Continu, Convex en Strikt Convex voldoet $\succeq$?

Een **eenregelige** motivatie per eigenschap volstaat. De twee vormen van convexiteit mogen grafisch worden toegelicht met een *duidelijk* plaatje.

- (c) (4 pt) Geef de definitie van $\succeq$ is Monotoon. Is $\succeq$ Monotoon? Motiveer je antwoord.

3. Gegeven is een tweemaal partiëel-differentiërbare en **reguliere** nutsfunctie $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$, met $Q = \mathbb{R}_+^2$, en een niet-lege, gesloten, begrensde en convexe budgetverzameling $B(\underline{p}, m)$, met $\underline{p} \gg \underline{0}$ en $m > 0$. Van deze nutsfunctie zijn enkel de (Marshalliaanse) vraagfunctie en de *indirecte* nutsfunctie bekend, die zijn gegeven als

$$d(\underline{p}, m) = \left(\frac{p_2 m}{p_1 (p_1 + p_2)}, \frac{p_1 m}{p_2 (p_1 + p_2)} \right)^\top \quad \text{en} \quad v(\underline{p}, m) = \sqrt{\frac{m(p_1 + p_2)}{p_1 p_2}}.$$

- (a) Bereken de minimale of Hicksiaanse uitgavenfunctie van de consument om nut $\hat{u}$ te behalen.
- (b) Laat mbv een stelling en berekeningen zien dat voor de Hicksiaanse vraagfunctie geldt $h(\underline{p}, \hat{u}) = \left(\frac{\hat{u}^2 p_2^2}{(p_1 + p_2)^2}, \frac{\hat{u}^2 p_1^2}{(p_1 + p_2)^2} \right)^\top$.
- (c) Stel $\underline{p} = (2, 2)^\top$ en $m = 100$. Bereken mbv. de Stelling van Slutsky de exacte Hicksiaanse Slutsky vergelijking van de vraag naar goed 1 als de prijs van goed 1 verandert met $\Delta p_1 = 1$.

Hint: Geef de exacte Hicksiaanse Slutsky vergelijkingen volgens het boek van Varian (2pt)?

4. In deze vraag wordt kennis van kleine formele bewijzen getoetst. Hoe dichter je eigen bewijs lijkt op het bewijs zoals behandeld in de syllabus cq. colleges, hoe meer punten je verdient. **Ter ondersteuning mag je een tekening bijgevoegen als je denkt dat dit de duidelijkheid ten goede komt.**

Gegeven is een tweemaal partieel-differentieerbare en **reguliere** nutsfunctie $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$, met $Q = \mathbb{R}_+^2$, een prijsvector $\underline{p} \gg \underline{0}$ en inkomen $m > 0$. Dit is voldoende voor het bestaan van een beste element of nutsmaximaliserende bundel $\underline{x}^*$ in $B(\underline{p}, m) = \{\underline{x} \in Q | \underline{p}^\top \underline{x} \leq m\}$.

- (a) Bewijs dat uit de strikte quasi-concaviteit van de nutsfunctie volgt dat de nutsmaximaliserende vraag $\underline{x}^*$ uniek is. **Hint:** Je mag terecht aannemen dat $\underline{x}^*$ op de rand van de budgetverzameling ligt.
- (b) (6pt) Stel de Lagrange functie op behorende bij het *primale* probleem (2pt) en het bijbehorende stelsel van eerste-orde voorwaarden (geen afleiding gevraagd) (2pt) en bewijs hieruit dat de vraag homogeen van de graad 0 is in $\underline{p} \gg \underline{0}$ en m .

5. Gegeven is een markteconomie met twee consumenten en twee goederen. Consument A heeft als nutsfunctie $u^A(\underline{x}^A) = (x_1^A)(x_2^A)^2$ en beginvoorraad $\underline{w}^A = (2, 1)^\top$. Consument B heeft als nutsfunctie $u^B(\underline{x}^B) = x_1^B x_2^B$ en beginvoorraad $\underline{w}^B = (2, 4)^\top$.

- (a) (4 pt) Laat zien dat de individuele (Marshalliaanse) vraagfuncties voor deze consumenten gelijk zijn aan

$$d^A(\underline{p}) = \left(\frac{2p_1 + p_2}{3p_1}, \frac{4p_1 + 2p_2}{3p_2} \right)^\top$$

en

$$d^B(\underline{p}) = \left(\frac{2p_1 + 4p_2}{2p_1}, \frac{2p_1 + 4p_2}{2p_2} \right)^\top$$

- (b) (4 pt) Bepaal Algemeen (Walras) evenwichtsprijzen.

Beschouw de allocatie $\hat{x} = (\hat{x}^A, \hat{x}^B)$ met $\hat{x}^A = (1, 2)^\top$ en $\hat{x}^B = (3, 3)^\top$.

- (c) (4 pt) Laat zien dat deze allocatie Pareto efficient is.
- (d) (2 pt) Welke prijzen ondersteunen de allocatie $\hat{x}$ als Algemeen (Walras) evenwichtsallocatie?
- (e) (4 pt) Bereken de waarde van y zodanig dat een markteconomie met initieel bezit $\underline{w}^A = (2, y)^\top$ en $\underline{w}^B = (2, 5 - y)^\top$ de gegeven Pareto efficiente allocatie $\hat{x}$ als algemeen evenwichtsallocatie oplevert.

6. Gegeven is een producent die één outputgoed produceert met behulp van twee inputgoederen volgens de productiefunctie

$$f(\underline{x}) = x_1 x_2$$

- (a) (4 pt) Bereken de (lange termijn) kostenminimaliserende vraagfunctie.
(b) (2 pt) Laat zien dat de (lange termijn) kostenfunctie gelijk is aan

$$c(\underline{w}, y) = 2\sqrt{w_1 w_2 y}$$

De producent neemt de inputprijzen $w_1 = w_2 = 1$ als gegeven.

- (c) (4 pt) Bereken de aanbodfunctie van de producent als hij zich als volledige mededinger gedraagt.

Stel dat er op korte termijn negen producenten met de in onderdeel (b) gegeven kostenfunctie op de markt actief zijn. De marktvraagfunctie naar het outputgoed is gelijk aan $D(p) = 60 - p$.

- (d) (3 pt) Bereken de korte termijn volledige mededingingsevenwichtsprijs.

Stel nu dat er maar één producent op deze markt actief is.

- (e) (4 pt) Bereken het aanbod van de producent indien hij zich als monopolist gedraagt.

Stel dat er twee producenten met de in onderdeel (b) gegeven kostenfunctie zijn.

- (f) (4 pt) Hoeveel bieden de producenten aan volgens het Cournot evenwicht?

7. Gegeven is het volgende extensieve vorm spel met twee spelers:

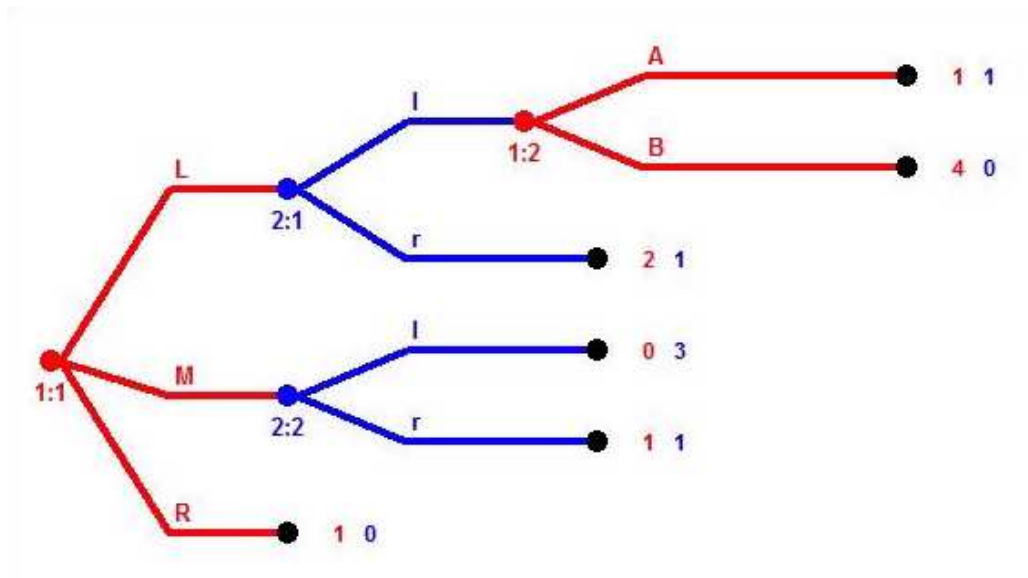


Figure 1:

- (a) (3 pt) Welke strategieprofielen geven (2,1) als uitbetaling?
- (b) (5 pt) Bepaal de (zuivere) Nash evenwichten van dit spel.
- (c) (3 pt) Welke van deze Nash evenwichten zijn deelspel (subgame) perfect?

Uitwerkingen geheel tentamen Inleiding Wiskundige Economie van 27 Mei 2008

Vraag 1 (a) Afschrijving nu: 0.5. $m = 3.5 \implies d_1(\underline{p}, m) = 0.35$. Afschrijvingen in 2012: 0.4. $m' = 3.6 \implies d_1(\underline{p}, m) = \frac{0.36}{p_1}$. $\frac{0.36}{p_1} \leq 0.35 \iff p_1 \geq \frac{36}{35} \approx 1.03$. (b) Zie Opgave 5.4.7.b Syllabus 2008. $\varepsilon_{21}(\underline{p}, m) < 0$ dus complement. (c) $e(\underline{p}, \hat{u})$ eist $k = 1$ mbt $\underline{p}$ en dus $e(\lambda \underline{p}, \hat{u}) = \lambda^{2a-2} e(\underline{p}, \hat{u})$, dus $a = \frac{3}{2}$. (d) Nee, antwoord staat letterlijk in Varian.

Vraag 2 De preferentierelatie is een variant op Voorbeeld 1.3.4 in de syllabus. (a) $\underline{x} \in W(\underline{y})$ d.e.s.d. als $x_1 + 2x_2 > 5$ en $2x_1 + x_2 > 5$. (b) Niet Volledig, Transitief, Niet Reflexief, Niet Continu, Convex, Strikt convex. (c) Definitie, zie Syllabus. Monotoon, want $\underline{x} > \underline{y} \implies x_1 + 2x_2 > y_1 + 2y_2$ en $2x_1 + x_2 > 2y_1 + y_2 \implies \min\{x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2\} > \min\{y_1 + 2y_2, 2y_1 + y_2\} \implies \underline{y} \succ \underline{x}$

Vraag 3 Deze opgave is gebaseerd op Voorbeeld 4.1.3, 4.2.3, 5.1.2. en 5.1.7 uit de Syllabus. (a) $e(\underline{p}, \hat{u}) = \frac{\hat{u}^2 p_1 p_2}{(p_1 + p_2)^2}$. (b) Antwoord $h(\underline{p}, \hat{u})$ staat in de vraag zelf. (c) $d_2(\underline{p}, m) = 25$, $\hat{u} = v(\underline{p}, m) = 10$, $d_2(\underline{p}', m) = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$, $h_2(\underline{p}', \hat{u}) = 16$. Inkomenseffect is $-\frac{8}{3} = -2\frac{2}{3}$ en substitutie-effect -9 .

Vraag 4 De gevraagde bewijzen zijn in de syllabus terug te vinden en tijdens het hoorcollege voorgedaan.

Deel 2

Vraag 5.

(a) Consument A: $\frac{MU_1^A(x_1^A, x_2^A)}{MU_2^A(x_1^A, x_2^A)} = \frac{(x_2^A)^2}{2x_1^A x_2^A} = \frac{x_2^A}{2x_1^A}$, en dus volgt uit de Lagrange eerste orde voorwaarden voor consument A dat: $\frac{MU_1^A(x_1^A, x_2^A)}{MU_2^A(x_1^A, x_2^A)} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{x_2^A}{2x_1^A} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow x_2^A = \frac{2p_1 x_1^A}{p_2}$. Invullen in budgetrestrictie (welke ook uit Lagrange eerste orde voorwaarden volgt) geeft $p_1 x_1^A + p_2 x_2^A = w_1^A p_1 + w_2^A p_2 \Leftrightarrow 3p_1 x_1^A = 2p_1 + p_2$. Dit geeft $x_1^A = \frac{2p_1 + p_2}{3p_1} = d_1^A(\underline{p})$, en $x_2^A = \frac{2p_1 x_1^A}{p_2} = \frac{4p_1 + 2p_2}{3p_2} = d_2^A(\underline{p})$.

Analoog voor consument B.

(b) Vraagoverschotfunctie $z(\underline{p}) = d^A(\underline{p}) + d^B(\underline{p}) - \underline{w}^A - \underline{w}^B =$
 $= \left(\frac{2p_1 + p_2}{3p_1}, \frac{4p_1 + 2p_2}{3p_2} \right)^\top + \left(\frac{2p_1 + 4p_2}{2p_1}, \frac{2p_1 + 4p_2}{2p_2} \right)^\top - (2, 1)^\top - (2, 4)^\top = \left(\frac{-14p_1 + 14p_2}{6p_1}, \frac{14p_1 - 14p_2}{6p_2} \right)^\top$.

Dan $z(\underline{p}) = 0 \Leftrightarrow z_1(\underline{p}) = 0 \Leftrightarrow -14p_1 + 14p_2 = 0$. Dus Walras evenwichtsprijzen zijn die prijzen $\underline{p} = (p_1, p_2)^\top$ waarvoor $\frac{p_1}{p_2} = 1$.

(c) Deze allocatie ligt in het inwendige van de Edgeworth box (en is dus bereikbaar) en voor deze allocatie geldt dat $\frac{MU_1^A(\hat{x}_1^A, \hat{x}_2^A)}{MU_2^A(\hat{x}_1^A, \hat{x}_2^A)} = \frac{\hat{x}_2^A}{2\hat{x}_1^A} = \frac{2}{2} = 1 = \frac{3}{3} = \frac{\hat{x}_2^B}{\hat{x}_1^B} = \frac{MU_1^B(\hat{x}_1^B, \hat{x}_2^B)}{MU_2^B(\hat{x}_1^B, \hat{x}_2^B)}$ en is dus Pareto optimaal.

(d) Alle prijsvectoren $\underline{p} = (p_1, p_2)^\top$ waarvoor $\frac{p_1}{p_2} = 1$ ondersteunen deze allocatie als algemeen evenwichtsallocatie.

Vraag 6.

(a) $\frac{MP_1(x_1, x_2)}{MP_2(x_1, x_2)} = \frac{x_2}{x_1}$, en dus volgt uit de Lagrange eerste orde voorwaarden dat: $\frac{MP_1(x_1, x_2)}{MP_2(x_1, x_2)} = \frac{w_1}{w_2} \Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{w_1}{w_2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{w_1 x_1}{w_2}$. Invullen in $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ (welke ook uit Lagrange eerste orde voorwaarden volgt) geeft $x_1 \left(\frac{w_1 x_1}{w_2} \right) = y \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{\frac{w_2 y}{w_1}}$. Thus, $d_1(\underline{w}, y) = \sqrt{\frac{w_2 y}{w_1}}$ and $d_2(\underline{w}, y) = \sqrt{\frac{w_1 y}{w_2}}$.

(b) Then $c(\underline{w}, y) = w_1 d_1(\underline{w}, y) + w_2 d_2(\underline{w}, y) = w_1 \sqrt{\frac{w_2 y}{w_1}} + w_2 \sqrt{\frac{w_1 y}{w_2}} = 2\sqrt{w_1 w_2 y}$.

(c) $c(y) = 2\sqrt{y}$, $MC(y) = y^{-1/2}$. Then $p = MC(y) \Leftrightarrow y = p^2$. $\frac{dMC(y)}{dy} = -\frac{1}{2}y^{-3/2} < 0$ for all $y \geq 0$. Dus geen eindig aanbod.

Vragen (d)-(f) vallen buiten de tentamenstof omdat niet aan de tweede orde voorwaarden is voldaan. Deze vragen zijn zeer soepel nagekeken. (Ik heb de volle punten gegeven voor de eerste orde voorwaarden.)

(e) $\max_{y \geq 0} P(y)y - c(y) = \max_{y \geq 0} (60 - y)y - 2\sqrt{y}$. Eerste orde voorwaarde: $60 - 2y - y^{-1/2} = 0$.

(f) Producent 1 (analoog voor producent 2): $\max_{y_1 \geq 0} P(y_1 + y_2)y_1 - c(y_1) = \max_{y_1 \geq 0} (60 - y_1 - y_2)y_1 - 2\sqrt{y_1}$. Eerste orde voorwaarde: $60 - 2y_1 - y_2 - y_1^{-1/2} = 0$.

Vraag 7.

(a) $((L, A), (r, l)), ((L, A), (r, r)), ((L, B), (r, l)), ((L, B), (r, r))$.

(b) De vier in (a) gegeven strategieprofielen zijn ook de vier Nash evenwichten.

(c) Enige Subgame perfect Nash evenwicht: $((L, B), (r, l))$.