

Inleiding Wiskundige Economie (Volledig tentamen incl. Deel 2)

Dr. Rene van den Brink en Dr. Harold Houba

Belangrijk

Deelnemers die een vrijstelling voor Deel 1 hebben, kunnen volstaan met het maken van Deel 2 waarvoor een maximale tijdsduur van 1 uur en 30 minuten geldt. De overige deelnemers maken het volledige tentamen. De opgaven zijn onderverdeeld in een Deel 1 en Deel 2.

Datum: 15.15-18.00, 23 Augustus, 2007.

Tijdsduur:

Alleen Deel II Vragen 5 t/m 8, maximaal 1 uur en 30 minuten.

Volledig tentamen Alle vragen, maximaal 2 uur en 45 minuten.

In geval van problemen: 020 598 6014, 1A-22.

Tentamenuitslag: Donderdag 6 September, 2007.

Inzage: Woensdag 13 September: 13.30-14.30, in 1A-22 of op afspraak bij verhindering.

Dit tentamen bevat 8 vragen en 5 paginas!

Deel 1

Vraag 1:* 4 items, totaal 16 punten,

Vraag 2:* 3 items, totaal 12 punten,

Vraag 3:* 3 items, totaal 12 punten,

Vraag 4:* 2 items, totaal 10 punten.

Deel 2

Vraag 5: 4 items, totaal 20 punten,

Vraag 6: 6 items, totaal 10 punten,

Vraag 7: 3 items, totaal 15 punten,

Vraag 8: 1 item, totaal 5 punten.

* Het maximum aantal punten per onderdeel in Deel 1 is 4, behalve onderdeel 4b (6pt).

Verhoog de score van je tentamen door eerst de vragen te beantwoorden die je het beste beheerst.

Veel succes!

Deel 1 van het tentamen Inleiding Wiskundige Economie, 23 augustus 2007

1. In deze vraag komen enkele basisbegrippen uit het boek van Varian, de Syllabus en/of het Hoorcollege aan de orde.

(a) Gegeven is een markteconomie met *drie* goederen die voldoet aan het Axioma van een Wrijvingloze Markt en waarvan alle prijsverhoudingen p_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, bekend zijn. Geef de formele definitie van de prijsverhouding uitgedrukt in marktprijzen en leg kort uit (formeel of in woorden) waarom de prijsvector wel of niet uniek is.

(b) Definieer de Engel curve van goed 1 en bepaal deze als $p_1 = p_2 = 1$ en

$$d(\underline{p}, m) = \begin{cases} (0, \frac{m}{p_2})^\top, & \text{als } m < \frac{p_1^2}{p_2}, \\ (\frac{m}{p_1} - \frac{p_1}{p_2}, \frac{p_1^2}{p_2})^\top, & \text{als } m \geq \frac{p_1^2}{p_2}. \end{cases}$$

(c) Definieer de inkomenselasticiteit van goed 1, bereken deze als $d(\underline{p}, m) = (\frac{2m}{2p_1+5p_2}, \frac{5m}{2p_1+5p_2})^\top$ en bepaal hiermee of goed 1 een inferieur, noodzakelijk of luxe goed is.

Stel we observeren tweemaal het keuzegedrag van een consument onder de veronderstelling dat deze een zwakke voorkeursrelatie heeft die volledig, transitief, continu, monotoon en strikt convex is. De eerste observatie is de keuze $\underline{x}^1 \in B(\underline{p}^1, m^1)$ bij de prijzen $\underline{p}^1$ en inkomen m^1 en de tweede observatie is de keuze $\underline{x}^2 \in B(\underline{p}^2, m^2)$ van een consument bij de prijzen $\underline{p}^2$ en inkomen m^2 .

(d) Geef de definities van directe en indirecte gebleken voorkeur en bepaal of er sprake is van directe of indirecte gebleken voorkeur tussen $\underline{x}^2$ en $\underline{y}$ als ook nog bekend is dat $\underline{x}^1 \in B(\underline{p}^2, m^2)$, $\underline{x}^2 \notin B(\underline{p}^1, m^1)$ en $\underline{y}$ behoort tot $B(\underline{p}^1, m^1)$? Geef een duidelijke toelichting.

2. Gegeven is een zwakke voorkeursrelatie $\succeq$ op de goederenruimte $Q = \mathbb{R}_+^2$ met de volgende omschrijving: $\underline{x} \succeq \underline{y} \iff x_1^2 + x_2^2 \geq y_1^2 + y_2^2$.

(a) Teken de verzamelingen $W(\hat{x})$, $I(\hat{x})$, en $V(\hat{x})$ in het punt $\hat{x} = (1, 2)^\top$.

(b) Aan welke van de eigenschappen Volledig, Transitief, Reflexief en Continu voldoet $\succeq$? Een **eenregelige** motivatie per eigenschap volstaat, zoals deze ook zijn gegeven in de Verkorte Antwoorden op Blackboard.

(c) Geef de definitie van $\succeq$ is Convex en ga na dat $\succeq$ niet Convex is.

Hint: Kies $\underline{x} \sim \underline{y}$ en maak gebruik van feit dat $f(c) = c^2$ een convexe functie is, dwz $f(\alpha c + (1 - \alpha)d) < \alpha f(c) + (1 - \alpha)f(d)$.

3. Gegeven is een tweemaal partieel-differentieerbare en **reguliere** nutsfunctie $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$, met $Q = \mathbb{R}_+^2$, en een niet-lege, gesloten, begrensde en convexe budgetverzameling $B(\underline{p}, m)$, met $\underline{p} \gg \underline{0}$ en $m > 0$. Van deze nutsfunctie zijn enkel de Marshalliaanse vraagfunctie en de *indirecte* nutsfunctie bekend, die zijn gegeven als

$$d(\underline{p}, m) = \left(\frac{m}{p_1 + \sqrt{p_1 p_2}}, \frac{m}{p_2 + \sqrt{p_1 p_2}} \right)^\top \quad \text{en} \quad v(\underline{p}, m) = -\frac{1}{m} [p_1 + p_2 + 2\sqrt{p_1 p_2}].$$

Merk op dat $v(\underline{p}, m) < 0$.

- (a) Bereken de minimale uitgavenfunctie van de consument om nut $\bar{u} < 0$ te behalen.
- (b) Laat mbv een stelling en berekeningen zien dat de Hicksiaanse vraagfunctie $h(\underline{p}, \bar{u}) = \left(-\frac{1}{\bar{u}} \left[1 + \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \right], -\frac{1}{\bar{u}} \left[1 + \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \right] \right)^\top$, met $\bar{u} < 0$.
- (c) Stel $\underline{p} = (2, 2)^\top$ en $m = 80$. Bereken mbv. de Stelling van Slutsky de exacte Slutsky vergelijking van de vraag naar goed 2 als de prijs van goed 1 verandert met $\Delta p_1 = 6$.
Hint: Geef de exacte Slutsky vergelijkingen volgens het boek van Varian (2pt)?

4. In deze vraag wordt kennis van kleine formele bewijzen getoetst. Hoe dichter je eigen bewijs lijkt op het bewijs zoals behandeld in de syllabus cq. colleges, hoe meer punten je verdient.
Ter ondersteuning mag je een tekening bijvoegen als je denkt dat dit de duidelijkheid ten goede komt.

- (a) Gegeven is een reguliere nutsfunctie $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$, met $Q = \mathbb{R}_+^2$, en een niet-lege, gesloten, begrensde en convexe budgetverzameling $B(\underline{p}, m)$, met $\underline{p} \gg \underline{0}$ en $m > 0$. Bewijs dat uit de strikte quasi-concaviteit van de nutsfunctie volgt dat de nutsmaximaliserende vraag $\underline{x}^*$ uniek is. Je mag (terecht) aannemen dat $\underline{x}^*$ op de rand van de budgetverzameling ligt.
- (b) (6pt) Gegeven is een reguliere nutsfunctie $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$, met $Q = \mathbb{R}_+^2$, die partieel differentieerbaar is in beide goederen. Stel de Lagrange functie op behorende bij het *duale* probleem om een gegeven nutsniveau $\hat{u}$ te bereiken (2pt), leidt hieruit het stelsel van eerste-orde voorwaarden af (2pt) en bewijs hieruit dat

$$\frac{MU_1(\underline{x})}{MU_2(\underline{x})} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{and} \quad u(\underline{x}) = \hat{u}.$$

Let op: Vergeet niet te vermelden de twee cruciale tussenstappen om van eerste-orde voorwaarden tot het gevraagde te komen.

Deel 2 van het tentamen Inleiding Wiskundige Economie, 23 augustus 2007

5. Gegeven is een markteconomie met twee consumenten en twee goederen. Consument A heeft als nutsfunctie $u^A(\underline{x}^A) = x_1^A x_2^A$ en beginvoorraad $\underline{w}^A = (0, 2)^\top$.

Consument B heeft als nutsfunctie $u^B(\underline{x}^B) = (x_1^B)^2 (x_2^B)^3$ en beginvoorraad $\underline{w}^B = (4, 0)^\top$. Beschouw de allocatie $\hat{\underline{x}} = (\hat{\underline{x}}^A, \hat{\underline{x}}^B)$ met $\hat{\underline{x}}^A = (3, \frac{4}{3})^\top$ en $\hat{\underline{x}}^B = (1, \frac{2}{3})^\top$.

- (a) (4 punten) Laat zien dat deze allocatie Pareto efficiënt is.
- (b) (3 punten) Welke prijzen ondersteunen deze allocatie als algemeen evenwichtsallocatie?
- (c) (5 punten) Bereken de waarde van y zodanig dat een markteconomie met initieel bezit $\underline{w}^A = (y, 2)^\top$ en $\underline{w}^B = (4 - y, 0)^\top$ de in (b) gevonden prijs en de gegeven Pareto efficiënte allocatie $\hat{\underline{x}}$ als algemeen evenwicht oplevert.

Beschouw een reguliere markteconomie met c goederen en n consumenten. Zij z de geaggregeerde vraagoverschotfunctie.

- (d) (2 punten) Geef een interpretatie van $\underline{p}^\top z(\underline{p})$ voor prijsvector $\underline{p} \in P$.
- (e) (6 punten) Bewijs dat $\underline{p}^\top z(\underline{p}) = 0$ voor iedere prijsvector $\underline{p} \in P$.

6. Beschouw de reguliere produktiefunctie $f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ gegeven door $f(\underline{x}) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$.

- (a) (5 punten) Bereken de (lange termijn) kostenminimaliserende vraagfunctie.
- (b) (3 punten) Bereken de (lange termijn) kostenfunctie.
- (c) (2 punten) Geef de technische substitutieverhouding tussen input 1 en 2 in inputvector $\underline{x} = (5, 3)^\top$.

7. Zij gegeven een duopolie met marktvraagfunctie $D(p) = 30 - p$. Beide producenten hebben kostenfunctie $c(y) = y^2 - 2y + 2$.

- (a) (5 punten) Bereken de (korte termijn) evenwichtsprijs indien beide producenten zich als prijsnemer gedragen.
- (b) (5 punten) Bereken de (korte termijn) evenwichtsprijs indien beide producenten zich volgens het Cournot model gedragen.
- (c) (5 punten) Bereken de winst van de producenten als ze zich als prijsnemer gedragen. Bereken ook de winst van de producenten als ze zich volgens het Cournot model gedragen.

8. (5 punten) Geef alle (zuivere) Nash evenwichten van het volgende extensieve vorm spel met twee spelers:

