Inleiding Wiskundige Economie (Deel 1)

Dr. Harold Houba

Datum: 15.15-17.00, 29 Maart, 2007.

In geval van problemen: Harold Houba, 020 598 6014, 1A-17.

Tentamenuitslag: Maandag 16 April, 2007

Inzage:
Dinsdag 17 April of Donderdag 19 April: 13.30-14.30, in 1A-22
Of op afspraak bij verhindering.

Korte uitwerkingen: Blackboard (uiteraard pas na afloop)

Dit tentamen bevat 4 vragen en vier paginas!

Vraag 1: 6 items,
Vraag 2: 4 items,
Vraag 3: 6 items,
Vraag 4: 3 items.

Het maximum aantal punten per onderdeel is 5, behalve onderdeel 4.b (10pt).
Het maximum aantal punten per Vraag is 30, 20, 30 en 20.

Verhoog de score van je tentamen door eerst de vragen te beantwoorden die je het beste beheerst.

Veel succes!

1. In deze vraag komen enkele basisbegrippen uit het boek van Varian, de Syllabus en/of het Hoorcollege aan de orde.

   (a) Geef het Axioma van een Wrijvingloze Markt.

   (b) Definieer in woorden de inkomenselasticiteit van de vraag naar goed j, $j = 1, \ldots, n$, geef de formule voor deze elasticiteit en geef de conditie waaronder goed j een luxe goed is.

   (c) Definieer de *inverse vraagfunctie* naar goed 1 en bepaal deze als $d(\underline{p}, m) = (\frac{2m}{2p_1+5p_2}, \frac{5m}{2p_1+5p_2})^\top$.

   (d) Geef de Identiteit van Roy.

   Stel we observeren tweemaal het keuzegedrag van een consument onder de veronderstelling dat deze een zwakke voorkeursrelatie heeft die een reguliere nutsfunctie voortbrengt. De eerste observatie is de keuze $\underline{x}^1 \in B(\underline{p}^1, m^1)$ bij de prijzen $\underline{p}^1$ en inkomen m^1 en de tweede observatie is de keuze $\underline{x}^2 \in B(\underline{p}^2, m^2)$ van een consument bij de prijzen $\underline{p}^2$ en inkomen m^2.

   (e) Voldoen $\underline{x}^1 \neq \underline{x}^2$ aan het Zwakke Axioma van Gebleken Voorkeur (WARP) als $\underline{x}^1 \in B(\underline{p}^2, m^2)$ en $\underline{x}^2 \in B(\underline{p}^1, m^1)$? Geef een duidelijke toelichting.

   (f) Is er sprake van directe of indirecte gebleken voorkeur tussen $\underline{x}^1$ en $\underline{y}$ als $\underline{x}^1 \notin B(\underline{p}^2, m^2)$, $\underline{x}^2 \in B(\underline{p}^1, m^1)$ en $\underline{y}$ behoort tot $B(\underline{p}^2, m^2)$ maar niet tot $B(\underline{p}^1, m^1)$? Geef een duidelijke toelichting.

2. Gegeven is een zwakke voorkeursrelatie $\succeq$ op de goederenruimte $Q = \mathbb{R}^2_+$ met de volgende omschrijving: $\underline{x} \succeq \underline{y} \iff 2x_2 - 8e^{-x_1} \geq 2y_2 - 8e^{-y_1}$.

   (a) Teken de verzamelingen $W(\hat{\underline{x}})$, $I(\hat{\underline{x}})$,en $V(\hat{\underline{x}})$ in het punt $\hat{\underline{x}} = (1, 2)^\top$. Neem $8e^{-1} \approx 3$.

   (b) Aan welke van de eigenschappen Volledig, Transitief, Reflexief en Continu voldoet $\succeq$? Een **eenregelige** motivatie per eigenschap volstaat, zoals deze ook zijn gegeven in de Verkorte Antwoorden op Blackboard.

   (c) Geef de definitie van $\succeq$ is Monotoon en laat hiermee zien dat $\succeq$ Monotoon is. Neem aan dat $f(x) = -8e^{-x}$ stijgend is (wat waar is).

   (d) Ga na of $\succeq$ een nutsfunctie $u : Q \to \mathbb{R}$ voortbrengt en, zo ja, kies een geschikte nutsfunctie u. Is $(u(\underline{x}))^2$ eveneens een nutsfunctie voortgebracht door $\succeq$? Motiveer je antwoord.

3. Gegeven is een tweemaal partieel-differentieerbare en **reguliere** nutsfunctie $u : Q \to \mathbb{R}$, met $Q = \mathbb{R}^2_+$, en een niet-lege, gesloten, begrensde en convexe budgetverzameling $B(\underline{p}, m)$, met $\underline{p} \gg \underline{0}$ en $m > 0$. Van deze nutsfunctie is enkel de gecompenseerde of Hicksiaanse uitgavenfunctie bekend, die is gegeven als

$$e(\underline{p}, \bar{u}) = p_1 \left(\bar{u} - \frac{p_1}{p_2} \right), \qquad \bar{u} > 2\frac{p_1}{p_2}.$$

Ga er vanuit dat aan de voorwaarde $\bar{u} > 2\frac{p_1}{p_2}$ is voldaan.

(a) Bereken de Hicksiaanse vraagfuncties.

(b) Bereken de indirecte nutsfunctie van de consument.

(c) Bereken de Marshalliaanse vraagfunctie $d(\underline{p}, m)$ mbv a. en b. en **niet** met de Identieit van Roy.

(d) Stel $\Delta p_1 < 0$. Leg aan de hand van een of twee duidelijke tekeningen uit wat het verschil is tussen de substitutie- en inkomenseffecten die Varian benoemt als de exacte Slutsky en de exacte Hicksiaanse effecten.

(e) Geef de Stelling van Slutsky voor goed 2 als de prijs van goed 1 verandert. Pas deze stelling toe op de in a., b. en c. gevonden antwoorden.

(f) Tot slot, veronderstel dat de consument ook initieel bezit $\underline{\omega} \geq \underline{0}$ heeft.
Bepaal $\frac{\partial}{\partial p_i} \left(e(\underline{p}, \bar{u}) - \underline{p}^\top \underline{\omega} \right)$ als functie van de oude Marshalliaanse vraag $\underline{\bar{x}}$ (original choice in Varian). Hoe werkt deze afgeleide door in de Stelling van Slutsky ingeval van aan- en verkoop?

Vergeet Vraag 4 niet, zie ommezijde.

4. In deze vraag wordt kennis van kleine formele bewijzen getoetst. Hoe dichter je eigen bewijs lijkt op het bewijs zoals behandeld in de syllabus cq. colleges, hoe meer punten je verdient. **Ter ondersteuning mag je een tekening bijgevoegen als je denkt dat dit de duidelijkheid ten goede komt.**

   Gegeven is een tweemaal partieel-differentieerbare en **reguliere** nutsfunctie $u : Q \to \mathbb{R}$, met $Q = \mathbb{R}^2_+$, een prijsvector $\underline{p} \gg \underline{0}$ en inkomen $m > 0$. Dit is voldoende voor het bestaan van een beste element of nutsmaximaliserende bundel $\underline{x}^*$ in $B(\underline{p}, m)$.

   (a) Bewijs dat in de nutsmaximaliserende bundel $\underline{x}^* \in B(\underline{p}, m)$ de budgetrestrictie bindend is.

   (b) (10pt) Stel de Lagrange functie van het *primale* probleem op (3pt) en leidt uit de eerste-orde voorwaarden af (4pt) dat $|MRS_{12}(\underline{x})| = \frac{p_1}{p_2}$ (3 pt).

   (c) Bepaal met behulp van de Wet van Euler de graad van homogeniteit in $\underline{x}$ van $u(\underline{x}) = 2\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$.
   Hint: Hoe luidt de Wet van Euler?