

Beknopte uitwerking tentamen ‘Inleiding Wiskundige Economie (deel 2)’ 29 mei 2006.

(Onder voorbehoud.)

Opgave 3.

- (a) Consument A: $\frac{MU_1^A(x_1^A, x_2^A)}{MU_2^A(x_1^A, x_2^A)} = \frac{x_2^A}{x_1^A}$, en dus volgt uit de Lagrange eerste orde voorwaarden voor consument A dat: $\frac{MU_1^A(x_1^A, x_2^A)}{MU_2^A(x_1^A, x_2^A)} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow p_2 x_2^A = p_1 x_1^A$. Invullen in budgetrestrictie (welke ook uit Lagrange eerste orde voorwaarden volgt) geeft $p_1 x_1^A + p_2 x_2^A = w_1^A p_1 + w_2^A p_2 \Leftrightarrow 2p_1 x_1^A = 2p_1 + p_2$. Dit geeft $x_1^A = \frac{2p_1 + p_2}{2p_1} = d_1^A(\underline{p})$, en $x_2^A = \frac{p_1 x_1^A}{p_2} = \frac{2p_1 + p_2}{2p_2} = d_2^A(\underline{p})$.

Consument B: $\frac{MU_1^B(x_1^B, x_2^B)}{MU_2^B(x_1^B, x_2^B)} = \frac{(x_2^B)^3}{3x_1^B(x_2^B)^2} = \frac{x_2^B}{3x_1^B}$, en dus volgt uit de Lagrange eerste orde voorwaarden voor consument B dat: $\frac{MU_1^B(x_1^B, x_2^B)}{MU_2^B(x_1^B, x_2^B)} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{x_2^B}{3x_1^B} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow p_2 x_2^B = 3p_1 x_1^B$. Invullen in budgetrestrictie (welke ook uit Lagrange eerste orde voorwaarden volgt) geeft $p_1 x_1^B + p_2 x_2^B = w_1^B p_1 + w_2^B p_2 \Leftrightarrow 4p_1 x_1^B = p_1 + p_2$. Dit geeft $x_1^B = \frac{p_1 + p_2}{4p_1} = d_1^B(\underline{p})$, en $x_2^B = \frac{3p_1 x_1^B}{p_2} = \frac{3(p_1 + p_2)}{4p_2} = d_2^B(\underline{p})$.

- (b) Vraagoverschotfunctie $z(\underline{p}) = d^A(\underline{p}) + d^B(\underline{p}) - \underline{w}^A - \underline{w}^B =$
 $= \left(\frac{2p_1 + p_2}{2p_1}, \frac{2p_1 + p_2}{2p_2} \right)^\top + \left(\frac{p_1 + p_2}{4p_1}, \frac{3(p_1 + p_2)}{4p_2} \right)^\top - (2, 1)^\top - (1, 1)^\top = \left(\frac{-7p_1 + 3p_2}{4p_1}, \frac{7p_1 - 3p_2}{4p_2} \right)^\top$.
 Dan $z(\underline{p}) = 0 \Leftrightarrow z_1(\underline{p}) = 0 \Leftrightarrow -7p_1 + 3p_2 = 0$. Dus Walras evenwichtsprijzen zijn die prijzen $\underline{p} = (p_1, p_2)^\top$ waarvoor $\frac{p_1}{p_2} = \frac{3}{7}$.

- (c) Alle drie de allocaties zijn bereikbaar. Allocatie 1 ligt in het inwendige van de Edgeworth box en voor deze allocatie geldt dat $\frac{MU_1^A(x_1^A, x_2^A)}{MU_2^A(x_1^A, x_2^A)} = \frac{4}{9} = \frac{MU_1^B(x_1^B, x_2^B)}{MU_2^B(x_1^B, x_2^B)}$ en is dus Pareto optimaal.

Allocatie 2 ligt in het inwendige van de Edgeworth box en voor deze allocatie geldt dat $\frac{MU_1^A(x_1^A, x_2^A)}{MU_2^A(x_1^A, x_2^A)} = \frac{5}{8} \neq \frac{1}{4} = \frac{MU_1^B(x_1^B, x_2^B)}{MU_2^B(x_1^B, x_2^B)}$ en is dus niet Pareto optimaal.

In allocatie 3 krijgt consument A de totale beginvoorraad, en is dus Pareto optimaal.

Opgave 4.

- (a) $\frac{MP_1(x_1, x_2)}{MP_2(x_1, x_2)} = \frac{\frac{1}{2}(x_1)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(x_2)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{(x_2)^{\frac{1}{2}}}{(x_1)^{\frac{1}{2}}}$, en dus volgt uit de Lagrange eerste orde voorwaarden dat:

$$\frac{MP_1(x_1, x_2)}{MP_2(x_1, x_2)} = \frac{w_1}{w_2} \Leftrightarrow \frac{(x_2)^{\frac{1}{2}}}{(x_1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{w_1}{w_2} \Leftrightarrow x_2 = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 x_1. \text{ Invullen in produktiefunctie (welke ook uit Lagrange eerste orde voorwaarden volgt) geeft } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{x_1} + \frac{w_1}{w_2} \sqrt{x_1} = \left(\frac{w_1 + w_2}{w_2}\right) \sqrt{x_1} = y \Leftrightarrow x_1 = \left(\frac{yw_2}{w_1 + w_2}\right)^2 = d_1(\underline{w}, y), \text{ en } x_2 = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 x_1 = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 \left(\frac{yw_2}{w_1 + w_2}\right)^2 = \left(\frac{yw_1}{w_1 + w_2}\right)^2 = d_2(\underline{w}, y).$$

- (b) $c(\underline{w}, y) = \underline{w}^\top d(\underline{w}, y) = w_1 d_1(\underline{w}, y) + w_2 d_2(\underline{w}, y) = w_1 \left(\frac{yw_2}{w_1 + w_2}\right)^2 + w_2 \left(\frac{yw_1}{w_1 + w_2}\right)^2 = \frac{w_1 w_2 y^2}{w_1 + w_2}.$

- (c) $x_2^* = 1, w_1 = w_2 = 1.$ Dan $f(x_1) = \sqrt{x_1} + 1$, en dus $d_1(y) = (y - 1)^2$ en $c(y) = w_1 x_1 + w_2 x_2^* = (y - 1)^2 + 1 = y^2 - 2y + 2.$ Omdat $MC(y) = \frac{dc(y)}{dy} = 2y - 2$, geldt $MC(y) = p \Leftrightarrow 2y - 2 = p \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}p + 1.$

Verder geldt $\frac{dMC(y)}{dy} = 2 > 0$ en $AVC(y) = MC(y) \Leftrightarrow y - 2 + \frac{1}{y} = 2y - 2 \Leftrightarrow y = 1.$

Dus de (korte termijn) aanbodfunctie bij volledige mededinging is $s(p) = \frac{1}{2}p + 1$ voor alle $p \geq 0.$

- (d) $S(p) = s(p) = \frac{1}{2}p + 1$, dus $S(p) = D(p) \Leftrightarrow \frac{1}{2}p + 1 = 10 - 2p \Leftrightarrow p = \frac{18}{5}.$

- (e) Inverse vraagfunctie: $P(y) = 5 - \frac{1}{2}y.$ Winstmaximaliseringsprobleem producent 1:

$$\max_{y_1 \geq 0} P(y_1 + y_2)y_1 - c(y_1) = \max_{y_1 \geq 0} (5 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2))y_1 - ((y_1)^2 - 2y_1 + 2) = \max_{y_1 \geq 0} 7y_1 - \frac{3}{2}(y_1)^2 - \frac{1}{2}y_1 y_2 - 2$$

Eerste orde voorwaarde: $7 - 3y_1 - \frac{1}{2}y_2 = 0$, dus $y_1 = r_1(y_2) = \frac{7}{3} - \frac{1}{6}y_2.$

Zo ook voor producent 2 geeft de reaktiefunctie $y_2 = r_2(y_1) = \frac{7}{3} - \frac{1}{6}y_1.$

Oplossen van de twee reaktievergelijningen geeft het Cournot evenwicht: $y_1 = y_2 = 2.$

Opgave 5.

- (a) De strategieverzamelingen van de twee spelers zijn $S_1 = \{Ax, Ay, Bx, By\}$ en $S_2 = \{a, b, c\}$. (Teken zelf de spelboom.) De normale vorm van het spel is

	a	b	c
Ax	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)
Ay	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)
Bx	(3, 0)	(0, 2)	(1, 3)
By	(3, 0)	(0, 2)	(2, 0)

Hieruit volgen de vier (zuivere) Nash evenwichten: $((Ax), (b))$, $((Ax), (c))$, $((Ay), (b))$ en $((Ay), (c))$.

- (b) Backward induction geeft het subgame perfect Nash evenwicht $((Ay), (b))$.