

Tentamen Inleiding Wiskundige Economie 2 juli 2003.
Per onderdeel staat tussen haakjes het aantal punten aangegeven.
Nagekeken: 4 juli, Inzage 4 juli, 13.00-14.00 uur (Kamer 1A-20).
Volledig tentamen: Tijd 3 uur.

Opgave 1. (Totaal 19 punten)

Gegeven is een consument met nutsfunctie $u(x_1, x_2) = (x_1)^2 x_2$ en inkomen $m > 0$.

- a. (5) Laat zien dat de gecompenseerde vraagfunctie van deze consument gegeven is door

$$h(\underline{p}, u) = \left(u^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{3}}, u^{\frac{1}{3}} \left(\frac{p_1}{2p_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\top}$$

- b. (5) Geef de uitgavenfunctie van deze consument.
- c. (5) Laat zien dat aan Shephard's lemma is voldaan.
- d. (4) Beschouw een markt met 2 goederen en een partieel differentieerbare marktvaartfunctie D waarvoor de eigen prijselasticiteit van goed 1 gelijk is aan $\varepsilon_{11}(\underline{p}, M) = -\frac{p_1}{p_1+p_2}$ en de kruislingse prijselasticiteit van goed 1 ten opzichte van goed 2 gelijk is aan $\varepsilon_{12}(\underline{p}, M) = -\frac{p_2}{p_1+p_2}$.
Geef de inkomenselasticiteit van goed 1.

Opgave 2. (Totaal 14 punten)

Gegeven is de volgende preferentierelatie op de twee-dimensionale goederenruimte: $\underline{x} \succeq \underline{y} \Leftrightarrow \underline{x} \geq \underline{y}$.

- a. (3) Laat zien dat deze preferentierelatie niet volledig is.
- b. (4) Aan welke van de volgende eigenschappen voldoet deze preferentierelatie: reflexiviteit, transitiviteit, strict convexiteit, zwakke monotonie.

Beschouw nu de volgende preferentierelatie op de twee-dimensionale goederenruimte: $\underline{x} \succeq \underline{y} \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 \geq y_1 + 2y_2$.

- c. (3) Laat zien dat deze preferentierelatie volledig is.
- d. (4) Aan welke van de volgende eigenschappen voldoet deze preferentierelatie: reflexiviteit, transitiviteit, convexiteit, zwakke monotonie.

Opgave 3. (Totaal 10 punten)

Gegeven is een consument met reguliere preferenties en budget $m = 30$. De consument consumeert twee goederen.

- a. (2) Geef de budgetverzameling voor deze consument bij prijzen $(p_1, p_2) = (3, 3)$ en $(p_1, p_2) = (1, 3)$. Teken in een figuur de bijbehorende budgetlijnen.
- b. (4) Stel dat de indifferentiecurve van de consument die raakt aan de budgetlijn bij prijzen $(p_1, p_2) = (3, 3)$ door het punt $(6, 4)$ gaat. Teken in dezelfde figuur als in onderdeel a. de budgetlijn die door het punt $(6, 4)$ gaat en evenwijdig is aan de budgetlijn bij prijzen $(p_1, p_2) = (1, 3)$. Teken in dezelfde figuur mogelijke indifferentiecurven die raken aan deze twee evenwijdige budgetlijnen in het geval dat goed 1 een inferior goed is dat geen Giffen goed is.

- c. (4) Geef in dezelfde figuur het (Slutsky) substitutieeffect en het inkomenseffect van de prijsverandering in goed 1 (van $p_1 = 3$ naar $p_1 = 1$) aan.

Opgave 4. (Totaal 7 punten)

Zij $v(\underline{p}, m)$ het indirecte nut van een consument met nutsfunctie u en zij $\lambda(\underline{p}, m)$ de waarde van de Lagrange multiplier van het nutsmaximaliseringsprobleem bij prijsvector $\underline{p}$ en inkomen m . Links en rechts differentiëren van de identiteit $v(\underline{p}, m) = u(d(\underline{p}, m))$ naar m geeft mbv de eerste orde Lagrange voorwaarden dat

$$\frac{\partial v(\underline{p}, m)}{\partial m} = \lambda(\underline{p}, m) \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial d_i(\underline{p}, m)}{\partial m}.$$

- a. (4) Laat zien dat

$$\frac{\partial v(\underline{p}, m)}{\partial m} = \lambda(\underline{p}, m).$$

- b. (3) Geef met behulp van onderdeel a. een interpretatie aan de Lagrange multiplier $\lambda(\underline{p}, m)$.

Opgave 5. (Totaal 12 punten)

Gegeven is een economie met twee consumenten, A en B, en twee goederen, goed 1 en goed 2. De nutsfuncties van de consumenten worden gegeven door $u^A(x_1^A, x_2^A) = (x_1^A)^2 x_2^A$ en $u^B(x_1^B, x_2^B) = (x_1^B)^2 x_2^B$, met x_j^h de consumptie van goed j , $j = 1, 2$, door consument h , $h = A, B$. Het initiële bezit van de consumenten wordt gegeven door $\underline{\omega}^A = (3, 0)^\top$ en $\underline{\omega}^B = (3, 6)^\top$.

- a. (2) Geef de vraagfuncties van de consumenten.
- b. (2) Geef de geaggregeerde vraagoverschotfunctie en laat zien dat deze voldoet aan de Wet van Walras.
- c. (3) Neem als prijsnormalisatie $p_2 = 1$ en bereken dan de evenwichtsprijs voor goed 1. Geef ook de bijbehorende evenwichtsallocatie.
- d. (3) Zij gegeven de bereikbare allocatie $\underline{x}^A = (a, 4)^\top$ en $\underline{x}^B = (6 - a, 2)^\top$. Voor welke waarde van a is deze allocatie Pareto efficient?
- e. (2) Teken de Edgeworth box en daarin het punt dat de beginallocatie $(\underline{\omega}^A, \underline{\omega}^B)$ weergeeft en het punt dat de onder c. gevonden evenwichtsallocatie weergeeft. Teken (schematisch) ook de indifferentiecurven van de twee consumenten door de evenwichtsallocatie.

Opgave 6. (Totaal 22 punten)

Pizzabakker Marco produceert pizza's uit tomatenpuree volgens de productiefunctie

$$f(x) = 2\sqrt{10(x - 10)},$$

waarbij x de hoeveelheid input van tomatenpuree is. De prijs van de tomatenpuree is $w = 1$. De vraag naar pizza's wordt gegeven door de functie $D(p) = 900 - 20p$ met p de prijs van een pizza.

- a. (2) Laat zien dat de kostenfunctie wordt gegeven door $c(y) = \frac{1}{40}y^2 + 10$, waarbij y de productie is.
- b. (2) Geef de inverse vraagfunctie $P(y)$.
- c. (3) Welke prijs vraagt Marco voor een pizza als er geen andere pizzabakkers zijn en hij dus een monopoliepositie heeft op de pizzamarkt.
- d. (3) Hoe groot is dan de winst en het producentensurplus van Marco?
- e. (4) Geef de gemiddelde kostenfunctie. Bij welke productie zijn de totale gemiddelde kosten minimaal en hoe groot zijn deze dan?

Veronderstel nu dat de pizzamarkt een volledige mededingingsmarkt is, waarop pizzabakkers vrij kunnen toe- en uittreden en waarbij alle pizzabakkers zich als prijsnemer op deze markt gedragen en alle dezelfde kostenfunctie hebben.

- f. (2) Geef de aanbodfunctie van Marco als functie van de prijs p van pizza's.
- g. (3) Hoe hoog is de korte termijn evenwichtsprijs als er **behalve Marco 8 andere pizzabakkers** op de markt actief zijn? Hoe groot is dan de winst per pizzabakker?
- h. (3) Hoeveel pizzabakkers zullen er op lange termijn actief zijn en hoe hoog is de lange termijn evenwichtsprijs?

Opgave 7. (Totaal 16 punten)

De onderneming Waterfun produceert sinds jaar en dag als enige luxe motorsloepen met een jaarlijkse winst van 10 (miljoen euro). De firma Zeilbouw heeft altijd alleen zeilboten gebouwd, maar overweegt nu om ook luxe motorsloepen te gaan bouwen van een type dat concurrerend is met het type dat Waterfun bouwt. Zeilbouw kan dus kiezen uit twee acties, actie W (Wel motorsloepen bouwen) of actie G (Geen motorsloepen bouwen). Als actie G wordt gekozen, gebeurt er verder niets. Zeilbouw maakt dan een jaarlijkse winst van 0 en Waterfun een jaarlijkse winst van 10 op de markt van motorsloepen.

Als Zeilbouw besluit motorsloepen te gaan bouwen, moeten ze vervolgens weer uit twee acties kiezen namelijk een Intensieve reclamecampagne voeren (actie I) of vertrouwen op Mond-tot-mond reclame (actie M). Als ze vertrouwen op mond-tot-mond reclame, onderneemt Waterfun geen enkele tegenactie. De twee ondernemingen delen dan de markt voor motorsloepen, waarbij Zeilbouw een (jaarlijkse) winst van 2 zal maken en Waterfun van 4. Als Zeilbouw actie I kiest, dan zal Waterfun zich op de nieuwe situatie beraden. Daarbij kunnen ze kiezen uit twee mogelijkheden: terug vechten via een Tegenreclamecampagne (actie T) of niets doen en Vertrouwen (actie V) op de sinds jaar en dag opgebouwde goede naam op het gebied van motorsloepen. De (jaarlijkse) winsten zijn dan als volgt: als Waterfun V kiest zijn de winsten 3 voor Zeilbouw en 3 voor Waterfun; als Waterfun T kiest zijn de winsten -2 (dus verlies van 2) voor Zeilbouw en 2 voor Waterfun.

- a. (4) Geef de strategische interactie tussen Zeilbouw (speler 1) en Waterfun (speler 2) weer als een spel in extensieve vorm door middel van een spelboom. Hoeveel beslispunten heeft speler 1, respectievelijk speler 2 en hoeveel acties hebben de spelers in elk van de beslispunten?
- b. (3) Geef van beide spelers de strategieverzamelingen.
- c. (3) Welke strategie wordt door speler 1, respectievelijk speler 2 gespeeld in het unieke subgame perfect Nash evenwicht.
- d. (3) Geef de normale vorm van het spel.
- e. (3) Geef alle Nash evenwichten (in zuivere strategieën) van het spel.

Antwoorden.

Opgave 5.

a. $d^A(\underline{p}) = (2, \frac{p_1}{p_2})^\top$, $d^B(\underline{p}) = (\frac{2p_1+4p_2}{p_1}, \frac{p_1+2p_2}{p_2})^\top$.

b. $z(p) = d^A(p) + d^B(p) - (6, 6)^\top$. Wet van Walras geldt: $p^\top z(p) = 0$ voor alle p .

c. Met $p_2 = 1$ volgt uit $z_1(p) = 2 + \frac{2p_1+4}{p_1} = 6$ dat $p_1 = 2$. Invullen in de vraagfuncties geeft $x^{*A} = (2, 2)^\top$ en $x^{*B} = (4, 4)^\top$ als evenwichtsallocatie.

d. Voor Pareto optimaliteit moet gelden $x^A + x^B = (6, 6)^\top$ (totale consumptie is gelijk aan totaal initieel bezit) en $\frac{MU_1^1}{MU_2^1} = \frac{MU_1^2}{MU_2^2}$. De marktvergelijkingen kloppen. Uit de gelijkheid van de marginale nutten volgt $a = 4$.

e. Edgeworth box is 6 bij 6 vierkant met initieel punt in $(3, 0)^\top$ en het evenwichtspunt in $(2, 2)^\top$ (alles vanuit de oorsprong van A. De indifferentiecurves raken elkaar in het evenwichtspunt).

Opgave 6.

a. Uit $y = f(x)$ volgt $x = \frac{1}{40}y^2 + 10$. Met inputprijs $w = 1$ volgt $c(y) = wx = \frac{1}{40}y^2 + 10$.

b. Uit $y = D(p)$ volgt $P(y) = 45 - \frac{1}{20}y$.

c. Marco maximaliseert $\max_y P(y)y - c(y)$, waaruit de monopolie hoeveelheid $y^m = 300$. De monopolieprijs is dan $p^m = P(y^m) = 30$.

d. De winst is dan $P(y^m)y^m - c(y^m) = 22\frac{1}{2} \cdot 300 - 10 = 6740$. Het producentensurplus is de winst plus vaste kosten is dus 6750.

e. $AC(y) = \frac{1}{40}y + \frac{10}{y}$. $AC(y)$ is minimaal als $AC(y) = MC(y) = \frac{1}{20}y$, waaruit volgt $y = 20$ en $AC(20) = 1$.

f. Uit $p = MC(y)$ volgt $y = s(p) = 20p$. Omdat $MC(y)$ toenemend is voor alle y en de variabele kosten minimaal nul zijn (in $y = 0$), volgt $s(p) = 20p$ voor alle $p \geq 0$.

c. Er zijn in totaal 9 pizzabakkers (8 anderen). Uit $D(p) = 9s(p)$, dus $900 - 20p = 180p$ volgt $p = 4\frac{1}{2}$, waarbij iedere producent dan 90 produceert. De winst is dan $4\frac{1}{2} \cdot 90 - \frac{1}{40} \cdot 90^2 - 10 = \frac{770}{4}$.

d. Op lange termijn is de evenwichtsprijs gelijk aan het minimum van de vaste kosten, dus $p = 1$. Het aantal pizzabakkers is dan $\frac{D(1)}{s(1)} = \frac{880}{20} = 44$.

Opgave 7.

a. Zeilbouw kiest eerst tussen W en G. Bij G wordt eindpunt boom bereikt net uitbetalingen (0,10). Bij W kiest Zeilbouw tussen I of M. Bij M wordt eindpunt boom bereikt net uitbetalingen (2,4). Bij I kiest Waterfun tussen T of V. T geeft uitbetalingen (-2,2), V geeft (3,3). Zeilbouw heeft twee beslispunten, Waterfun 1, in elk beslispunt zijn er 2 acties.

b. $S_1 = \{(W, I), (W, M), (G, I), (G, M)\}$, $S_2 = \{T, V\}$.

c. Subgame Perfect Nash evenwicht volgt uit backwards inductie en is: Waterfun speelt V, Zeilbouw speelt (W,I).

d. Dit is een 4 bij 2 matrixspel gegeven door:

	T	V
(W, I)	-2,2	3,3
(W, M)	2,4	2,4
(G, I)	0,10	0,10
(G, M)	0,10	0,10

e. Er zijn twee Nash evenwichten: actiecombinatie $((W, I); V)$ met payoffs (3, 3) en $((W, M); T)$ met payoffs (2, 4). (Het laatste Nash evenwicht is niet subgame perfect.)