

tentamen inleiding theoretische informatica 16 december 2008

Opgave 1.

- (a) Teken de volgende term als boom:

$$M = (\lambda x. x y) (\lambda y. y (y z)) (\lambda u. u)$$

Geef in je plaatje aan wat de vrije variabelen van M zijn.

(3 punten)

- (b) Geef twee verschillende (verschillend van M en verschillend van elkaar) α -equivalente varianten van de term M uit 1a.

(4 punten)

- (c) Bereken de substitutie

$$(\lambda x. x y (\lambda z. y z u)) [y := \lambda v. z]$$

(4 punten)

- (d) Reduceer de term

$$(\lambda x. \lambda y. x) y z$$

stap voor stap naar β -normaalvorm.

(4 punten)

Opgave 2.

- (a) Geef de Church-numerals voor 1, 2, en 3.

(3 punten)

- (b) Laat zien dat de Church-numeral voor 2 typeerbaar is in simpel getypeerde λ -calculus door een type-afleiding te geven.

De typeringsregels zijn gegeven (aan het eind van dit tentamen).

(5 punten)

- (c) Geef een (ongetypeerde) term suc voor *successor*, en laat zien dat $\text{suc } c_1$ naar c_2 reduceert.

Hier is c_1 het Church-numeral voor 1, en c_2 het Church-numeral voor 2.

(5 punten)

- (d) Definieer een functie in OCAML die als input een Church-numeral neemt (geschreven in OCAML), en als output de bijbehorende integer geeft.

(5 punten)

Opgave 3.

- (a) Wat is een fixed-point operator in de λ -calculus?

(2 punten)

- (b) Laat zien dat

$$T = (\lambda x. \lambda y. y (x x y)) (\lambda x. \lambda y. y (x x y))$$

een fixed-point combinator is.

(5 punten)

- (c) Reduceer T uit 3b met de leftmost-outermost strategie.

(5 punten)

- (d) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de leftmost-innermost (call-by-value) strategie niet normalizerend is.

(5 punten)

Opgave 4.

- (a) Definieer in OCAML het datatype `bintree` van binary trees met gehele getallen op de bladeren.

(5 punten)

- (b) Geef in OCAML een functie `flatten` die als input een `bintree` neemt zoals gedefinieerd in 4a, en als output de lijst labels zoals ze van links naar rechts in de `bintree` voorkomen.

Het datatype voor `natlist` mag je gebruiken zonder het te definiëren.

(5 punten)

Opgave 5. Gegeven een signatuur met soort S en functiesymbolen $a : \rightarrow S$, $b : \rightarrow S$, en $f : S \rightarrow S$. De bijbehorende equationele specificatie bestaat uit twee vergelijkingen:

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ f(f(f(x))) &= f(x) \end{aligned}$$

- (a) Geef een afleiding (met alle afleidingsstappen expliciet) voor de vergelijking $f(f(b)) = f(f(f(f(a))))$.

(4 punten)

- (b) Geef een initieel model voor deze equationele specificatie.

(5 punten)

- (c) Geef een model voor deze equationele specificatie met een drager die uit drie elementen bestaat. Dit model mag wel confusion bevatten, maar geen junk.

(3 punten)

- (d) Voeg een vergelijking toe aan de specificatie, zodat het door jou in (c) gegeven model een initieel model wordt.

(3 punten)

Opgave 6. Gegeven is een signatuur Σ met twee constanten c en d , en één éénplaatsig functiesymbool f . Verder zijn gegeven de volgende Σ -algebras $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.

- De drager van $\mathcal{A}$ is de verzameling met drie elementen $A = \{-1, 0, 1\}$. Verder worden de constanten en het functiesymbool geïnterpreteerd door $c_{\mathcal{A}} = 0$, $d_{\mathcal{A}} = -1$ en $f_{\mathcal{A}}(n) = |n|$.
- De drager van $\mathcal{B}$ is de verzameling met vier elementen $B = \{-2, 2, -3, 3\}$. Voor de interpretatie hebben we nu $c_{\mathcal{B}} = -2$, $d_{\mathcal{B}} = -3$, en weer $f_{\mathcal{B}}(n) = |n|$.

- (a) Teken de modellen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. Gebruik daarbij pijltjes voor de interpretatie van f .

(2 punten)

- (b) Geef een vergelijking die waar is in $\mathcal{A}$, maar niet in $\mathcal{B}$.

(2 punten)

- (c) Geef een initieel correcte specificatie E van $\mathcal{A}$.

(5 punten)

- (d) Geef indien mogelijk een homomorfisme van $\mathcal{A}$ naar $\mathcal{B}$.

(3 punten)

- (e) Geef indien mogelijk een homomorfisme van $\mathcal{B}$ naar $\mathcal{A}$.

(3 punten)

De typeringsregels van simpel getypeerde λ -calculus:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma, x : A \vdash x : A \\
 \hline
 \Gamma, x : A \vdash M : B \\
 \hline
 \Gamma \vdash (\lambda x. M) : A \rightarrow B \\
 \hline
 \Gamma \vdash F : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash M : A \\
 \hline
 \Gamma \vdash (FM) : B
 \end{array}$$