

tentamen inleiding theoretische informatica
25 mei 2007

Opgave 1. Gegeven een signatuur met soort S en functiesymbolen $a : \rightarrow S$, $b : \rightarrow S$, $c : \rightarrow S$ en $f : S \rightarrow S$. De bijbehorende equationele specificatie bestaat uit twee vergelijkingen:

$$\begin{aligned} f(f(b)) &= a \\ b &= c \end{aligned}$$

- a. Geef een afleiding (met alle afleidingsstappen expliciet) voor $a = f(f(c))$.
(2 punten)
- b. Geef een model voor deze equationele specificatie, met een drager die uit drie elementen bestaat. Dit model mag wel confusion bevatten, maar geen junk.
(10 punten)
- c. Beschrijf in detail het termmodel voor deze equationele specificatie.
(10 punten)

Opgave 2. Geef een equationele specificatie (inclusief een declaratie van alle functiesymbolen) met als initieel model de verzameling $\mathbb{Z}$ van gehele getallen, met optelling en aftrekking.

(12 punten)

Opgave 3. De term M is gedefinieerd als:

$$M = (\lambda u. u (\lambda y. z)) (\lambda x. x ((\lambda v. v) (\lambda v. v)))$$

- a. Teken M als boom.
(2 punten)
- b. Geef een reductierij van M naar normaalvorm die een overbodige stap bevat. Geef alle stappen van de reductierij expliciet, en geef aan welke stap niet nodig is om de normaalvorm te bereiken.
(5 punten)
- c. Reduceer $(\lambda x. x x) (\lambda s. \lambda z. s z)$ naar normaalvorm.
(4 punten)
- d. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de leftmost-innermost (call-by-value) strategie niet normalizerend is.
(5 punten)

Opgave 4.

- a. We representeren paren met de paringsoperator $\pi = \lambda r z. z \text{ } l r$.
Geef een λ -term voor de eerste projectiefunctie π_1 en laat zien dat er geldt $\pi_1 (\pi P Q) \rightarrow_\beta P$.
(5 punten)
- b. We representeren de booleans als $\text{true} = \lambda x y. x$ en $\text{false} = \lambda x y. y$.
Geef een λ -term voor not en laat zien dat deze term het gewenste gedrag vertoont op input true.
(5 punten)
- c. We representeren lijsten met $\text{nil} = \lambda z. \text{true}$ en $\text{cons} = \lambda h t. \lambda z. z h t$.
Geef een λ -term voor empty (de functie die een lijst als input neemt en true oplevert precies dan als de lijst leeg is).
(5 punten)

Opgave 5.

- a. Laat zien dat

$$T = (\lambda x. \lambda y. y (x x y)) (\lambda x. \lambda y. y (x x y))$$

een fixed point combinator is.

(5 punten)

- b. Laat zien dat de term $\lambda x. \lambda y. x y$ typeerbaar is in de lege omgeving door een typeringsafleiding te geven.

(De typeringsregels staan hieronder.)

(5 punten)

De typeringsregels van simpel getypeerde λ -calculus:

$$\Gamma, x : A \vdash x : A$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash (\lambda x. M) : A \rightarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash F : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash (F M) : B}$$

Opgave 6.

- a. Geef een definitie in OCAML van de polymorfe functie

```
append : 'a list -> 'a list -> 'a list
```

die als input twee lijsten neemt en als output de concatenatie van die lijsten levert. Een voorbeeld van het gebruik van `append`:

```
# append [1;2;3] [4;5;6] ;;  
- : int list = [1; 2; 3; 4; 5; 6]
```

(5 punten)

- b. Geef een definitie in OCAML van het datatype `intbintree` van de binaire bomen met gehele getallen op de knopen (en geen labels op de bladeren).

(5 punten)

- c. Geef een definitie in OCAML van de functie `flatten` die als input een `intbintree` neemt en als output een lijst met de labels van de boom geeft (volgorde: van links naar rechts).

(5 punten)

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.