

tentamen inleiding theoretische informatica
23 augustus 2006

Opgave 1. De term M is gedefinieerd als:

$$M = (\lambda f. f \mid \Omega) (\lambda xy. x x)$$

met $\Omega = (\lambda x. x x) (\lambda x. x x)$ en $\mid = \lambda x. x$.

- (a) Teken M als boom.
(De afkortingen Ω en $\mid$ mogen dan niet blijven staan.)
(3 punten)
- (b) Geef twee verschillende α -equivalente varianten van M .
(2 punten)
- (c) Reduceer M volgens de leftmost-innermost (call-by-value) strategie.
(5 punten)
- (d) Reduceer M volgens de leftmost-outermost (call-by-need) strategie.
(5 punten)

Opgave 2.

- (a) Geef een specificatie van de operatie *exclusive or*, notatie xor, die twee booleans als input neemt en *true* oplevert precies dan als precies één van de inputs *true* is.
(3 punten)
- (b) Geef een lambda term voor xor.
(3 punten)
- (c) Laat zien dat voor de λ -term xor uit 2b geldt: $\text{xor true false} \rightarrow_{\beta} \text{true}$.
(3 punten)
- (d) Geef een afleiding van $3 : \text{nat} \vdash (\lambda x. x) 3 : \text{nat}$.
(De typeringsregels staan hieronder.)
(4 punten)

De typeringsregels van simpel getypeerde λ -calculus:

$$\begin{array}{c} \Gamma, x : A \vdash x : A \\ \hline \Gamma, x : A \vdash M : B \\ \hline \Gamma \vdash (\lambda x. M) : A \rightarrow B \\ \hline \Gamma \vdash F : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash M : A \\ \hline \Gamma \vdash (F M) : B \end{array}$$

Opgave 3.

- (a) Laat zien dat de term $Y = \lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))$ een fixed point combinator is.
(4 punten)
- (b) Geef een λ -term voor de functie *map*, die een functie elementsgewijs toepast op een lijst. Bijvoorbeeld:

$$\text{map kwadraat } [2, 0, 3] = [4, 0, 9]$$

Je mag gebruikmaken van een fixed point combinator, en de λ -termen *empty* (die test of een lijst leeg is), *head*, *tail*, *nil*, en *cons*.

(4 punten)

- (c) Geef een definitie van de functie *map* als in 3(b) in OCaml.
(4 punten)

Opgave 4.

- (a) Geef een definitie in OCAML van de functie

```
range : int -> int -> int list
```

die als input twee integers neemt en als output levert de lijst van integers beginnend bij het eerste argument tot en met het tweede argument. In het geval dat het eerste argument groter is dan het tweede wordt de lege lijst als output gegeven. Een voorbeeld van het gebruik van *range*:

```
# range 3 11 ;;  
- : int list = [3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11]
```

(5 punten)

- (b) Geef een definitie in OCAML van de functie

```
som : int list -> int
```

die als input een lijst integers neemt en als output de som van de elementen van de lijst levert. Een voorbeeld van het gebruik van *som*:

```
# som [1;2;3] ;;  
- : int = 6
```

(5 punten)

(c) Een definitie van de functie `foldr` in OCAML is als volgt:

```
let rec foldr f n l =  
  match l with  
  | [] -> n  
  | h :: t -> f h (foldr f n t) ;;
```

Gebruik `foldr` om een alternatieve definitie van `som` te geven.

(6 punten)

Opgave 5. Gegeven is de volgende specificatie `Zom`:

```
module Zom  
  
  sorts elt  
  
  functions  
    a :                               -> elt  
    b :                               -> elt  
    c :                               -> elt  
    f : elt                           -> elt  
  
  equations  
  
    [E1] : f(f(x)) = f(x)  
    [E2] : f(b) = a  
  
end Zom
```

Voor deze specificatie beschouwen we de volgende Σ -algebra's $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$.

$\mathcal{K}$: $K = \mathbb{Z}$, $a_{\mathcal{K}} = 1$, $b_{\mathcal{K}} = -1$, $c_{\mathcal{K}} = -2$, $f_{\mathcal{K}}(x) = |x|$

$\mathcal{L}$: $L = \{-2, -1, 1, 2\}$, $a_{\mathcal{L}} = 1$, $b_{\mathcal{L}} = -1$, $c_{\mathcal{L}} = 2$, $f_{\mathcal{L}}(x) = |x|$

$\mathcal{M}$: $M = \{-2, -1, 1, 2\}$, $a_{\mathcal{M}} = 1$, $b_{\mathcal{M}} = -1$, $c_{\mathcal{M}} = -2$, $f_{\mathcal{M}}(x) = |x|$

$\mathcal{N}$: $N = \{0\}$, $a_{\mathcal{N}} = 0$, $b_{\mathcal{N}} = 0$, $c_{\mathcal{N}} = 0$, $f_{\mathcal{N}}(x) = |x|$

(a) Geef een afleiding voor de volgende vergelijking:

$$f(f(a)) = f(b)$$

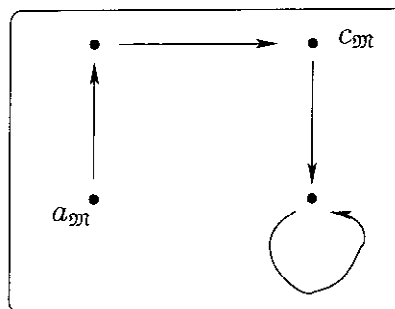
(5 punten)

- (b) Ga voor elk van de algebra's $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ na of het een model is voor de specificatie Zom . Alleen negatieve antwoorden hoef je te motiveren.
(5 punten)
- (c) Ga voor elk van de algebra's $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ ook na of het een initieel model is voor Zom . Geef voor de modellen die niet initieel zijn de junk en/of confusion aan.
(12 punten)

Opgave 6.

Gegeven is een signatuur Σ met twee constanten, a , c en één éénplaatsig functiesymbool f . Verder is gegeven de Σ -algebra $\mathcal{M}$, die hieronder is getekend. (De interpretatie van f is met pijlen aangegeven.)

$\mathcal{M}$:



Geef een initieel correcte specificatie E van $\mathcal{M}$.

(12 punten)

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.