



tentamen inleiding theoretische informatica
29 mei 2006

Opgave 1. De term M is gedefinieerd als:

$$M = (\lambda x. ((\lambda u. u) x) (\lambda z. x \Omega)) \lambda y. z$$

met $\Omega = (\lambda x. x x) (\lambda x. x x)$.

- (a) Teken M als boom.
(De afkorting Ω mag dan niet blijven staan.)
(3 punten)
- (b) Geef twee verschillende α -equivalente varianten van M .
(2 punten)
- (c) Reduceer M volgens de leftmost-innermost (call-by-value) strategie.
(5 punten)
- (d) Reduceer M volgens de leftmost-outermost (call-by-name) strategie.
(5 punten)

Opgave 2.

- (a) Geef de definities van de Church numerals c_0 , c_1 , en c_2 in de λ -calculus.
(3 punten)
- (b) Geef een λ -term S voor successor.
(3 punten)
- (c) Laat zien dat voor de λ -term S uit 2b geldt: $S c_1 \rightarrow_{\beta} c_2$.
(3 punten)
- (d) Geef de algemene definitie van `churchnumeral` in OCAML.
(3 punten)
- (e) Geef de definitie in OCAML van de functie `backtointeger` die als input een Church numeral neemt en als output het natuurlijke getal geeft dat gerepresenteerd wordt door de input.
(3 punten)

Opgave 3.

- (a) Geef de definitie van een λ -term `empty` waarvoor geldt

$$\begin{array}{ll} \text{empty nil} & \rightarrow_{\beta} \text{ true} \\ \text{empty (cons HT)} & \rightarrow_{\beta} \text{ false} \end{array}$$

(4 punten)

- (b) Laat zien dat `empty nil` $\rightarrow_{\beta}$ `true`.

(4 punten)

- (c) Laat zien dat $T = (\lambda x. \lambda y. y (x x y)) (\lambda x. \lambda y. y (x x y))$ een fixed point combinator is.

(4 punten)

- (d) Geef een λ -term `som` voor de functie die als input een lijst van natuurlijk getallen neemt, en als output geeft de som van alle elementen van die lijst (en 0 als de input-lijst leeg is).

Je mag gebruikmaken van de functies `empty`, `plus` (voor optellen), `head`, `tail`, en een fixed point combinator.

(4 punten)

- (e) Geef een definitie van de functie `som` als in 3(d) in OCaml.

(4 punten)

Opgave 4.

- (a) Geef een definitie in OCAML van de functie

```
append : 'a list -> 'a list -> 'a list
```

die als input twee lijsten neemt en als output de concatenatie van de eerste en de tweede lijst levert. Een voorbeeld van het gebruik van `append`:

```
# append [1;2;3] [4;5;6] ;;  
- : int list = [1; 2; 3; 4; 5; 6]
```

(5 punten)

- (b) Geef een definitie in OCAML van de functie

```
suffix : 'a list -> 'a list list
```

die als input een lijst neemt en als output een lijst van alle suffixen van die lijst geeft. Een suffix van een lijst is een eind-deel van die lijst. Een voorbeeld van het gebruik van `suffix`:

```
# suffix [1;2;3] ;;  
- : int list list = [[1; 2; 3]; [2; 3]; [3]; []]
```

(5 punten)

Opgave 5. Gegeven is de volgende specificatie Hem:

```

module Hem

  sorts elt

  functions
    n  :                               ->  elt
    e  :                               ->  elt
    p  :  elt                          ->  elt
    s  :  elt                          ->  elt

  equations
    [E1] : p(s(x)) = x
    [E2] : s(p(x)) = x

end Hem

```

Voor deze specificatie beschouwen we de volgende Σ -algebra's $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{N}$.

$\mathfrak{K}$: $K = \mathbb{Z}$, $n_{\mathfrak{K}} = 1$, $e_{\mathfrak{K}} = 2$, $s_{\mathfrak{K}}(x) = x + 1$, $p_{\mathfrak{K}}(x) = x - 1$

$\mathfrak{L}$: $L = \mathbb{Z}$, $n_{\mathfrak{L}} = 1$, $e_{\mathfrak{L}} = 2$, $s_{\mathfrak{L}}(x) = x + 2$, $p_{\mathfrak{L}}(x) = x - 2$

$\mathfrak{M}$: $M = \mathbb{Z}$, $n_{\mathfrak{M}} = 1$, $e_{\mathfrak{M}} = 2$, $s_{\mathfrak{M}}(x) = x + 3$, $p_{\mathfrak{M}}(x) = x - 3$

$\mathfrak{N}$: $N = \mathbb{Z}$, $n_{\mathfrak{N}} = 1$, $e_{\mathfrak{N}} = 2$, $s_{\mathfrak{N}}(x) = |x|$, $p_{\mathfrak{N}}(x) = -|x|$

(a) Geef een afleiding voor de volgende vergelijking:

$$s(s(s(p(n)))) = p(s(s(s(n))))$$

(5 punten)

(b) Van de algebra's $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ is er één geen model voor de specificatie Hem. Welk model is dat en waarom?

(3 punten)

(c) Ga voor elk van overige drie algebra's na of het een initieel model is voor Hem. Geef voor de modellen die niet initieel zijn de junk en/of confusion aan.

(10 punten)

Opgave 6. Gegeven is een signatuur Σ met één constante c , en één éénplaatsige functiesymbool f . Verder zijn gegeven de volgende Σ -algebras $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

- De drager van $\mathfrak{A}$ is de verzameling met twee elementen $A = \{-1, 1\}$.
Verder worden de constante en het functiesymbool geïnterpreteerd door $c_{\mathfrak{A}} = -1$ en $f_{\mathfrak{A}}(n) = |n|$.
 - De drager van $\mathfrak{B}$ is de verzameling met vier elementen $B = \{-2, 2, -3, 3\}$.
Voor de interpretatie hebben we nu $c_{\mathfrak{B}} = -2$ en weer $f_{\mathfrak{B}}(n) = |n|$.
- (a) Teken de modellen $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$. Gebruik daarbij pijltjes voor de interpretatie van f .
(2 punten)
- (b) Geef een initieel correcte specificatie E van $\mathfrak{A}$.
(5 punten)
- (c) Geef een vergelijking die waar is in $\mathfrak{A}$, maar niet in $\mathfrak{B}$.
(5 punten)

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.