

tentamen inleiding theoretische informatica
3 mei 2005

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven. Opgaven 1, 2 en 3 gaan over λ -calculi, opgave 4 gaat over OCAML, en opgaven 5 en 6 gaan over equationele logica.

Opgave 1.

- (a) Teken de volgende term als boom:

$$M = \lambda x. ((\lambda u. u \ v) \ x) ((\lambda v. u \ v) \ x)$$

(2 punten)

- (b) Geef twee verschillende α -equivalente varianten van de term M uit 1a.

(4 punten)

- (c) Reduceer $(\lambda x. x \ u) (\lambda u. v)$ naar β -normaalkom (schrijf elke stap op).

(4 punten)

Opgave 2. We representeren lijsten met $\text{nil} = \lambda z. \text{true}$ en de gebruikelijke definitie $\text{cons} = \lambda h t. \lambda z. z \ h \ t$.

- (a) Geef een specificatie van de functie `empty` die een lijst als input neemt en `true` oplevert precies dan als de lijst leeg is, en `false` anders.

(5 punten)

- (b) Geef een λ -term voor `empty`.

(5 punten)

- (c) Laat zien dat je definitie van `empty` uit 2b het juiste gedrag vertoont op input `nil` (met de definitie als hierboven), en op input `cons H T`.

(5 punten)

- (d) Geef een definitie in de λ -calculi van de functie `quad` die als input een eindige lijst van natuurlijke getallen neemt, en als output de lijst van kwadraten van die getallen. De lege lijst wordt afgebeeld op de lege lijst.

Hierbij mag je gebruikmaken van de representaties voor *empty*, *head*, *tail*, en *kwadraat* (voor het kwadrateren van een getal), en van de fixed point combinator $Y (= \lambda f. (\lambda x. f \ (x \ x)) (\lambda x. f \ (x \ x)))$.

(5 punten)

Opgave 3.

- (a) Let uit waarom de leftmost-innermost reductiestrategie (call-by-value) niet normalizerend is.
(5 punten)
- (b) Reduceer in de term $(\lambda u. u v) (\lambda x. \Omega)$ herhaaldelijk de lazy redex todat je een weak head normal form (WHNF) vindt.
We gebruiken hier de notatie $I = \lambda x. x$ en $\Omega = (\lambda x. x x) (\lambda x. x x)$.
(5 punten)
- (c) De λ -term $(\lambda x. x) \text{true}$ met $\text{true} : \text{bool}$ kan getypeerd worden.
Wat is dan het type van de abstractie $\lambda x. x$?
(De typeringsregels staan hieronder.)
(5 punten)

De typeringsregels van simpel getypeerde λ -calculus:

$$\begin{array}{c} \Gamma, x : A \vdash x : A \\ \hline \Gamma, x : A \vdash M : B \\ \hline \Gamma \vdash (\lambda x. M) : A \rightarrow B \\ \hline \Gamma \vdash F : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash M : A \\ \hline \Gamma \vdash (F M) : B \end{array}$$

Opgave 4. Deze opgave gaat over OCAML.

- (a) Definieer in OCAML een functie `quad` die met een lijst van integers als input de lijst van kwadraten van die integers retourneert.
Dus het gebruik van `quad` moet bijvoorbeeld het volgende effect hebben:
- ```
quad [5;6;2;0];;
- : int list = [25; 36; 4; 0]
```
- (5 punten)
- (b) Definieer in OCAML een functie `add_at_end` die gegeven een data-element en een lijst dat element aan het eind van de lijst toevoegt.  
Dus het gebruik van `add_at_end` moet bijvoorbeeld het volgende effect hebben:
- ```
# add_at_end 4 [1;6;2];;  
- : int list = [1; 6; 2; 4]  
# add_at_end 4 [];;  
- : int list = [4]
```

(5 punten)

Opgave 5. Gegeven is de volgende specificatie **Tent**:

```
module Tent

  sorts thing

  functions
    a  :                ->  thing
    b  :                ->  thing
    c  :                ->  thing
    f  :  thing         ->  thing

  equations
    [E1] : f(f(x)) = f(x)
    [E2] : f(a) = a

end Tent
```

Voor deze specificatie beschouwen we de volgende Σ -algebra's $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ en $\mathfrak{M}$.

$\mathfrak{K}$: $K = \{-1, 0, 1\}$, $a_{\mathfrak{K}} = 0$, $b_{\mathfrak{K}} = -1$, $c_{\mathfrak{K}} = 1$, $f_{\mathfrak{K}}(n) = n^2$.

$\mathfrak{L}$: $L = \mathbb{Z}$, $a_{\mathfrak{L}} = 2$, $b_{\mathfrak{L}} = -3$, $c_{\mathfrak{L}} = -4$, $f_{\mathfrak{L}}(n) = |n|$.

$\mathfrak{M}$: $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $a_{\mathfrak{M}} = 0$, $b_{\mathfrak{M}} = -1$, $c_{\mathfrak{M}} = -2$, $f_{\mathfrak{M}}(n) = |n|$.

De algebra's $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ zijn modellen voor de specificatie **Tent**. Dit hoeft u niet te bewijzen.

- (a) Geef een afleiding voor de volgende vergelijking:

$$f(f(f(f((b)))))) = f(f(b))$$

(5 punten)

- (b) Geef een vergelijking [E3] die waar is in $\mathfrak{K}$, maar niet in $\mathfrak{L}$.

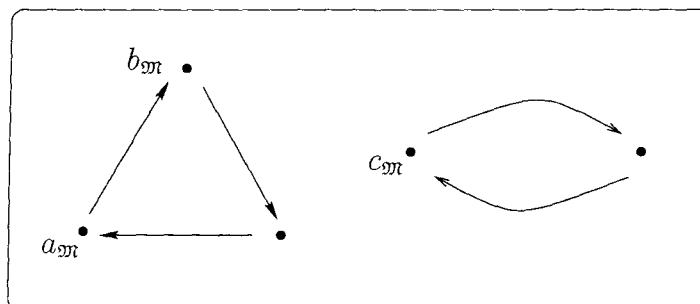
(5 punten)

- (c) Ga voor elk van de algebra's $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ na of het een initieel model is voor **Tent**. Geef voor de modellen die niet initieel zijn de junk en/of confusion aan.

(10 punten)

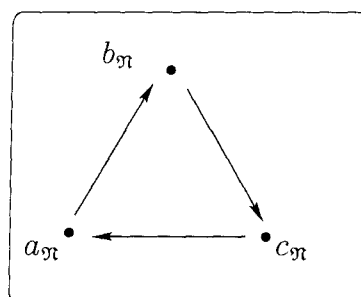
Opgave 6. Gegeven is een signatuur Σ met drie constantes, a , b en c , en één éénplaatsig functiesymbool f . Verder is gegeven de Σ -algebra $\mathfrak{M}$, die hieronder is getekend. (de interpretatie van f is met pijlen aangegeven.)

$\mathfrak{M}$:



- (a) Geef een initieel correcte specificatie E van $\mathfrak{M}$.
(5 punten)
- (b) Geef voor de gevonden specificatie een kanonieke termalgebra.
(5 punten)
- (c) Voor dezelfde signatuur is hier nog een Σ -algebra $\mathfrak{N}$ getekend.

$\mathfrak{N}$:



Bestaat er een homomorfisme φ van $\mathfrak{M}$ naar $\mathfrak{N}$? Motiveer je antwoord.
(5 punten)

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.