

Tentamen Inleiding Theoretische Informatica
Deel I : Lambda Calculus (3 opgaven)
9 mei 2000

Opgave 1.

- a. Schrijf de lambda term $(\lambda x. (\lambda yz. z y) x) u (\lambda x. x)$ in de notatie met alle haakjes en teken hem als boom.
(5 punten)
- b. Geef een term die geen normaalvorm heeft.
Geef een term die in weak head normal form (WHNF) is, maar niet in normaalvorm.
(5 punten)
- c. Geef een volledige type-afleiding van het volgende judgement:
 $\{g : \text{Bool} \rightarrow \text{Nat}, f : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}\} \vdash \lambda x. g(f x) : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}.$
(Zie de volgende pagina voor het typeringssysteem.)
(5 punten)

Opgave 2.

- a. We gebruiken de definities van booleans en conditional:

$$\begin{aligned}\text{true} &= \lambda xy. x \\ \text{false} &= \lambda xy. y \\ \text{cond} &= \lambda bxy. b x y\end{aligned}$$

Laat zien dat voor willekeurige termen P en Q geldt $\text{cond false } P Q \rightarrow_{\beta} Q$.
Geef de reductierij stap voor stap.

(5 punten)

- b. We gebruiken de definities van de Church numerals en Plus:

$$\begin{aligned}c_n &= \lambda s. \lambda z. s^n(z) \\ \text{Plus} &= \lambda xy. \lambda sz. x s (y s z)\end{aligned}$$

Laat zien dat er geldt $\text{Plus } c_0 c_1 \rightarrow_{\beta} c_1$. Geef de reductierij stap voor stap.

(5 punten)

- c. Reduceer de term $\lambda x. \Omega(11)$ volgens de maximale strategie.
(5 punten)

Opgave 3.

- a. Wat is een fixed point in de λ -calculus?
(5 punten)
- b. Laat zien hoe de term $Y = \lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))$ gebruikt kan worden als fixed point combinator.
Wat is hier het fixed point?
(5 punten)
- c. Geef de reductierij volgens de leftmost-outermost strategie van de term $Y f$ met f een variabele.
Heeft de term $Y f$ een normaalvorm?
(5 punten)

Het Typeringssysteem.

1. De *variabele regel*.

$$\Gamma, x : A \vdash x : A$$

2. De *abstractie regel*.

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x. M : A \rightarrow B}$$

3. De *applicatie regel*.

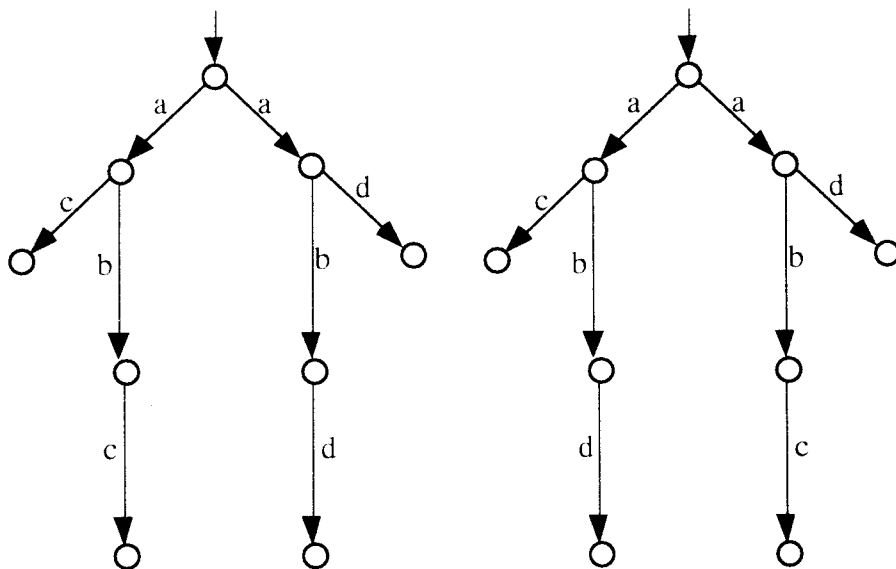
$$\frac{\Gamma \vdash F : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash F M : B}$$

Pagina 3

Voor het deel procesalgebra zijn er ook 3 opgaven: 4, 5 en 6. Elk van deze is ook 15 punten waard. In totaal kunnen dus 90 punten behaald worden. 10 punten zijn gratis. Het eindcijfer is het aantal punten gedeeld door 10. Er zijn 6 pagina's voor het hele tentamen.

Opgave 4. [15 punten]

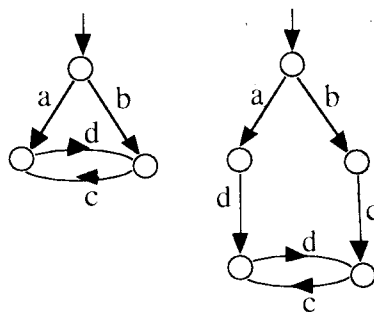
(a) [5 punten] Zijn de twee procesgrafen in Figuur 1 bisimilaair? Motiveer het antwoord.



Figuur 1

(b) [5 punten]

Zelfde vraag voor de twee procesgrafen in Figuur 2.

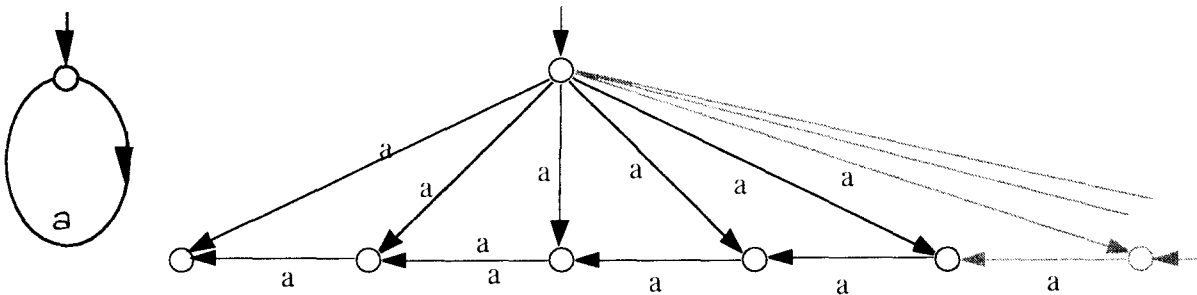


Figuur 2

(c) [5 punten]

Zelfde vraag voor de twee procesgrafieën in Figuur 3. De rechter is een oneindige graaf; alle labels zijn 'a'; er zijn oneindig oneindig veel naar links lopende a-pijlen.

De linker graaf is een a-cycle.



Figuur 3

Opgave 5. [15 punten]

(a) [5 punten]

Bereken in PA de term $a \parallel (b + c)$, en ook de term $a \parallel b + a \parallel c$.
(Hierbij zijn a, b, c atomaire acties.)

(b) [5 punten]

Teken van beide termen in (a) de procesgraaf, dus $G(a \parallel (b + c))$ en $G(a \parallel b + a \parallel c)$.

(c) [5 punten]

Bewijs dat in PA: $a \parallel (b + c) \neq a \parallel b + a \parallel c$.

Anders gezegd, dat $PA \not\models a \parallel (b + c) = a \parallel b + a \parallel c$.

Opgave 6. [15 punten]

(a) [5punten]

Het proces X is gegeven door de recursievergelijkingen

$$X = (a + b)X + cY + dZ$$

$$Y = deZ$$

$$Z = fX + b$$

(Hierbij zijn a, b, c, d, e, f atomaire acties, X, Y, Z zijn recursievariabelen.)

Teken de procesgraaf van proces X .

(b) [5 punten]

Gegeven is een actie alphabet $A = \{a, b, c, d\}$, en communicatiefunctie γ met $\gamma(b, c) = d$, overige communicaties triviaal (dus δ).

Bereken met behulp van ACP (de tabel met ACP is bijgesloten) de term $(a + b) \parallel c$.

Bereken ook de term $\partial_H((a + b) \parallel c)$, met $H = \{b, c\}$.

(c) [5 punten]

Teken de procesgraaf van beide termen in (b), dus $G((a + b) \parallel c)$ en $G(\partial_H((a + b) \parallel c))$.

Tabel met ACP staat op de volgende pagina.

- (A1) $x + y = y + x$
- (A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (A3) $x + x = x$
- (A4) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- (A5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

- (A6) $x + \delta = x$
- (A7) $\delta \cdot x = \delta$

- (C1) $a|b = \gamma(a, b)$ als $\gamma(a, b)$ gedefinieerd, anders δ
- (C2) $(a|b)|c = a|(b|c)$
- (C3) $\delta|a = \delta$

- (CM1) $x \parallel y = x \sqcup y + y \sqcup x + x|y$
- (CM2) $a \sqcup x = a \cdot x$
- (CM3) $ax \sqcup y = a(x \parallel y)$
- (CM4) $(x + y) \sqcup z = x \sqcup z + y \sqcup z$
- (CM5) $ax|b = (a|b)x$
- (CM6) $a|bx = (a|b)x$
- (CM7) $ax|by = (a|b)(x \parallel y)$
- (CM8) $(x + y)|z = x|z + y|z$
- (CM9) $x|(y + z) = x|y + x|z$

- (D1) $\partial_H(a) = a$ als $a \notin H$
- (D2) $\partial_H(a) = \delta$ als $a \in H$
- (D3) $\partial_H(x + y) = \partial_H(x) + \partial_H(y)$
- (D4) $\partial_H(x \cdot y) = \partial_H(x) \cdot \partial_H(y)$