

Tentamen Inleiding Theoretische Informatica
Deel I : Lambda Calculus (3 opgaven)
17 januari 2000

Opgave 1.

- a. Schrijf de lambda term $\lambda yz. (\lambda x. x (\lambda u. u) y) y y$ in de notatie met alle haakjes en teken hem als boom.
(5 punten)
- b. Wat is een beta-normaalvorm?
Geef een voorbeeld van een lambda term die *niet* in beta-normaalvorm is.
(5 punten)
- c. Geef een volledige type-afleiding van het volgende judgement:
 $\{f : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}\} \vdash \lambda xy. f \ x \ y : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}.$
 (Zie de volgende pagina voor het typeringssysteem.)
 (5 punten)

Opgave 2.

- a. We gebruiken de definities van de Church numerals en de successor:

$$\begin{aligned} c_n &= \lambda s. \lambda z. s^n(z) \\ \text{Suc} &= \lambda x s z. s (x s z) \end{aligned}$$

Laat zien dat er geldt $\text{Suc } c_2 \rightarrow_\beta c_3$. Geef de reductierij stap voor stap.
(5 punten)

- b. We gebruiken de definitie van paren en de eerste projectie:

$$\begin{aligned} \pi &= \lambda l r z. z \ l \ r \\ \pi_1 &= \lambda u. u (\lambda l r. l) \end{aligned}$$

Laat zien dat voor willekeurige termen P en Q geldt $\pi_1 (\pi P Q) \rightarrow_\beta P$.
Geef de reductierij stap voor stap.
(5 punten)

- c. Laat zien dat er geldt $Y F =_\beta F (Y F)$ voor een willekeurige term F .
 (De term Y is de fixed point combinator.)
 (5 punten)

Voor de leesbaarheid nog eens:
 c. Laat zien dat er geldt $Y F =_\beta F (Y F)$ voor een willekeurige term F . Hierbij is $Y = \lambda f. (\lambda x. f(x x)) (\lambda x. f(x x)).$

Opgave 3. Bekijk de term $M = (\lambda x. (\lambda y. z) (x x)) (\lambda x. x x)$.

- Geef een reductierij volgens de leftmost-innermost strategie.
(5 punten)
- Geef een reductierij volgens de perpetuele strategie.
(5 punten)
- Heeft de term M een normaalvorm?
Is de term M sterk normalizerend?
(5 punten)

Het Typeringssysteem.

- De *variabele regel*.

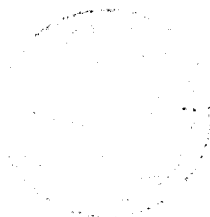
$$\Gamma, x : A \vdash x : A$$

- De *abstractie regel*.

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x. M : A \rightarrow B}$$

- De *applicatie regel*.

$$\frac{\Gamma \vdash F : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash F M : B}$$

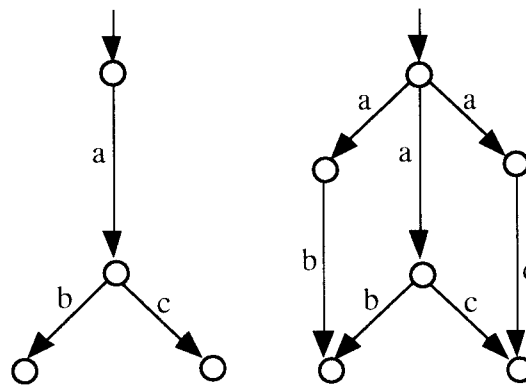


Pagina 3

Voor het deel procesalgebra zijn er ook 3 opgaven: 4, 5 en 6. Elk van deze is ook 15 punten waard. In totaal kunnen dus 90 punten behaald worden. 10 punten zijn gratis. Het eindcijfer is het aantal punten gedeeld door 10. Er zijn 6 pagina's voor het hele tentamen.

Opgave 4. [15 punten]

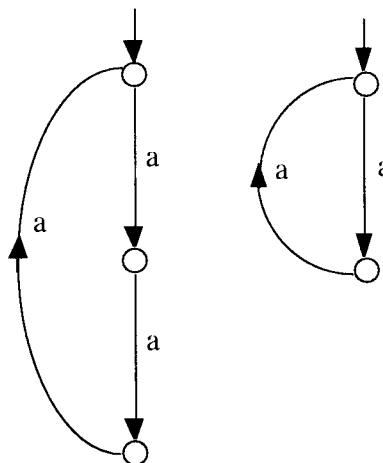
(a) [5 punten] Zijn de twee procesgrafieën in Figuur 1 bisimilaïr? Motiveer het antwoord.



Figuur 1

(b) [5 punten]

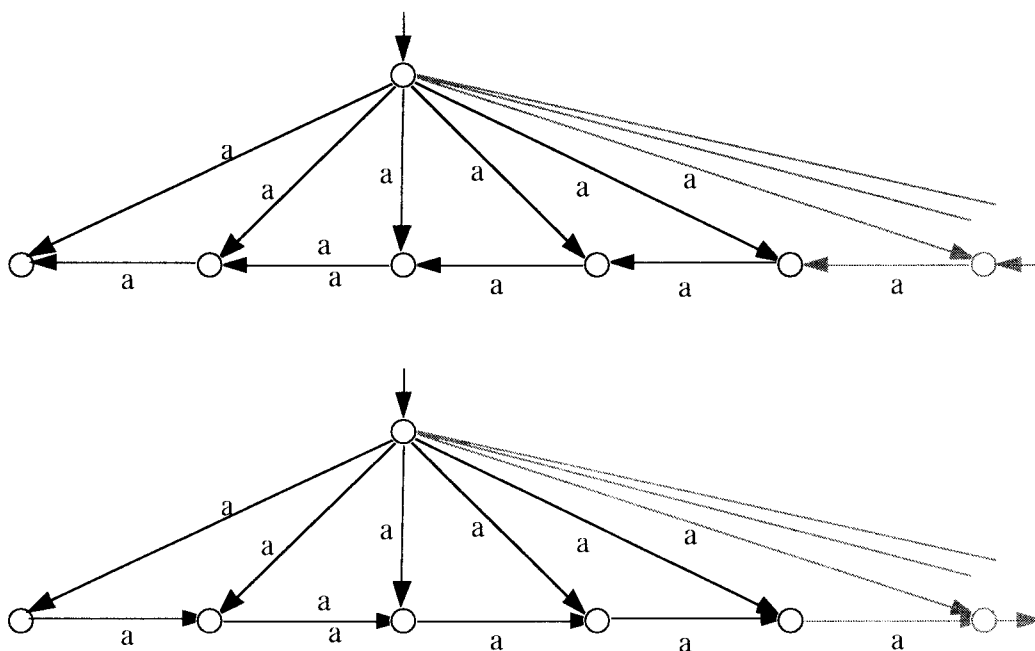
Zelfde vraag voor de twee procesgrafieën in Figuur 2.



Figuur 2

(c) [5 punten]

Zelfde vraag voor de twee procesgrafen in Figuur 3. Dit zijn twee oneindige grafen; alle labels zijn 'a'. In de bovenste graaf zijn er oneindig veel naar links lopende a-pijlen; in de onderste oneindig veel naar rechts lopende a-pijlen zoals getekend.



Figuur 3

Opgave 5. [15 punten]

(a) [5 punten]

Bereken in PA de term $ab \parallel c$, en ook de term $a(b \parallel c)$. (Hierbij zijn a, b, c atomaire acties.)

(b) [5 punten]

Teken van beide termen in (a) de procesgraaf, dus $G(ab \parallel c)$ en $G(a(b \parallel c))$.

(c) [5 punten]

Bewijs dat in PA: $ab \parallel c \neq a(b \parallel c)$. Anders gezegd, dat $PA \not\models ab \parallel c \neq a(b \parallel c)$.

Opgave 6. [15 punten]

(a) [5punten]

Het proces X is gegeven door de recursievergelijkingen

$$X = aX + bY + c$$

$$Y = deX.$$

(Hierbij zijn a, b, c, d, e atomaire acties, X, Y zijn recursievariabelen.)

Teken de procesgraaf van proces X .

(b) [5 punten]

Gegeven is een actie alfabet $A = \{a, b, c, d\}$, en communicatiefunctie γ met

$\gamma(b, c) = d$, overige communicaties triviaal (dus δ).

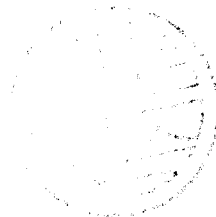
Bereken met behulp van ACP (de tabel met ACP is bijgesloten) de term $ab \parallel c$.

Bereken ook de term $\partial_H(ab \parallel c)$, met $H = \{b, c\}$.

(c) [5 punten]

Teken de procesgraaf van beide termen in (b), dus $G(ab \parallel c)$ en $G(\partial_H(ab \parallel c))$.

Tabel met ACP staat op de volgende pagina.



- (A1) $x + y = y + x$
 (A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
 (A3) $x + x = x$
 (A4) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
 (A5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- (A6) $x + \delta = x$
 (A7) $\delta \cdot x = \delta$
- (C1) $a|b = \gamma(a, b)$ als $\gamma(a, b)$ gedefinieerd, anders δ
 (C2) $(a|b)|c = a|(b|c)$
 (C3) $\delta|a = \delta$
- (CM1) $x \parallel y = x \sqcup y + y \sqcup x + x|y$
 (CM2) $a \sqcup x = a \cdot x$
 (CM3) $ax \sqcup y = a(x \parallel y)$
 (CM4) $(x + y) \sqcup z = x \sqcup z + y \sqcup z$
 (CM5) $ax|b = (a|b)x$
 (CM6) $a|bx = (a|b)x$
 (CM7) $ax|by = (a|b)(x \parallel y)$
 (CM8) $(x + y)|z = x|z + y|z$
 (CM9) $x|(y + z) = x|y + x|z$
- (D1) $\partial_H(a) = a$ als $a \notin H$
 (D2) $\partial_H(a) = \delta$ als $a \in H$
 (D3) $\partial_H(x + y) = \partial_H(x) + \partial_H(y)$
 (D4) $\partial_H(x \cdot y) = \partial_H(x) \cdot \partial_H(y)$

ACP