

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Inleiding PDV (400163)
Afdeling Wiskunde	Hertentamen
Vrije Universiteit	5-7-2013, 3 uur

1 punt voor de moeite, $\frac{3}{2}$ voor elke som. Totaal 10.

Geen rekenmachines.

1. Bepaal voor $t \geq 0$ de oplossing $u(x, t)$ van

$$u_t + x^3 u_x + u = 0, \quad u(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

2. Laat $u(x, t)$ de oplossing zijn van

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

met beginvoorwaarden

$$u(x, 0) = \frac{x}{1 + x^2} \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Bepaal de nulverzameling van $u(x, t)$ in het (x, t) -vlak en schets het tekenverloop van $u(x, t)$.

3. De warmtevergelijking $u_t = u_{xx}$ heeft oplossingen van de vorm

$$u(x, t) = f(y), \quad y = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad t > 0.$$

Bepaal de oplossing $u(x, t)$ van deze vorm die voldoet aan $u = 0$ op de positieve t -as en $u = 1$ op de positieve x -as.

4. Laat $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ een begrensde gebied zijn met gladde rand $\partial\Omega$, en laat $n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de uitwendige normaal zijn. Beschouw voor gegeven gladde $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ het probleem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{du}{dn} + u = 0 \quad \text{op } \partial\Omega.$$

We nemen aan dat dit probleem een gladde oplossing $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ heeft. Laat A de oplossingsoperator zijn gedefinieerd door $Af = u$. Deze operator heeft alleen reële eigenwaarden. Laat zien alle eigenwaarden van A positief zijn.

5. Laat $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ open zijn en neem aan dat $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continu is en voldoet aan de middelwaarde eigenschap: in elk punt $x_0 \in \Omega$ is $u(x_0)$ gelijk aan het gemiddelde van $u(x)$ over elke $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\} \subset \Omega$. Leg uit waarom u dan een gladde functie is die voldoet aan $\Delta u = 0$. Je mag de eigenschappen van door de Poisson integraalformule gedefinieerde functies gebruiken en ook de middelwaarde eigenschap van harmonische functies. Hint: gebruik een maximum principe argument.

6. Laat $a > 0$ en $b > 0$. Beschouw voor $u = u(x, t)$ de vergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au$$

voor $0 < x < 1$ met randvoorwaarden $u(0, t) = u_x(1, t) + bu(1, t) = 0$.

- (a) Bepaal de waarden van $a > 0$ en $b > 0$ waarvoor er niet-triviale stationaire oplossingen zijn.
- (b) Voor welke $a > 0$ en $b > 0$ zijn er oplossingen waarvoor $u(x, t)$ niet naar 0 gaat als $t \rightarrow +\infty$?