

Inleiding PDV, eerste deeltentamen, 26-10-2007, 12.00-14.00

Geen formulebladen, geen rekenmachines. 1 punt voor elk onderdeel, totaal 11. Werk netjes, geef uitleg bij wat je doet. Succes!

Gebruikt mag worden dat voor alle $m, n \in \mathbb{N}$ met $m \neq n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0$$

1. (a) Neem aan dat

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1)$$

met $N \in \mathbb{N}$ en $a_0, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R}$. Laat zien dat

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (2)$$

- (b) De gelijkheid van Parseval: druk voor f gegeven door (1) de integraal

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$$

uit in $a_0, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R}$.

2. De Fouriercoëfficiënten van de stuksgewijs continue 2π -periodieke functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ worden gedefinieerd door (2) hierboven.

- (a) Zie 1b. Formuleer de gelijkheid van Parseval voor f .
(b) Neem nu aan dat f continu is en op $[-\pi, \pi]$ continu differentieerbaar. De Fouriercoëfficiënten van f' noemen we a'_n en b'_n . Druk a_n en b_n uit in a'_n en b'_n .
(c) Laat voor f als in 2b zien dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{en} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

absoluut convergent zijn. Hint: pas op de formules verkregen in 2b de ongelijkheid $|\alpha\beta| \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$ toe en gebruik de gelijkheid van Parseval voor f' .

3. Laat de 2π -periodieke functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voor $-\pi \leq x \leq \pi$ gegeven zijn door $f(x) = x^2$.

(a) Bepaal de Fouriercoëfficiënten van f en f' .

(b) Bereken met behulp van 3a en de gelijkheid van Parseval

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{en} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

4. Voor $u = u(x, t)$ wordt de gedempte slinger vergelijking gegeven door

$$u_{tt} + ku_t = u_{xx}. \quad (3)$$

Hier is $k > 0$ een parameter. In deze som nemen we $0 < x < \pi$ en randvoorwaarden $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$.

(a) Bepaal alle oplossingen van de vorm $u(x, t) = h(t) \sin x$.

(b) Voor welke waarden van k zijn de oplossingen uit 4a oscillerend in de tijd?

(c) Laat zien dat er voor elke $k > 0$ oplossingen zijn die oscilleren in de tijd.

(d) Hoe snel gaan de oplossingen in 4c naar 0 als $t \rightarrow \infty$? Voor welke k zijn er oplossingen die minder hard naar 0 gaan?