



Tentamen

Afdeling Wiskunde

Inleiding Partiële Differentiaalvergelijkingen
voor studenten Wiskunde en Natuurkunde

Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit Amsterdam

Datum: dinsdag 3 februari 2004, (3 uur)

Beantwoordingsinstructie: 4 opgaven; *alle antwoorden beargumenteren.*

Geen rekenmachine, geen open boek, wel formuleblad.

1. Laat $u(x, y)$ een harmonische functie zijn op de schijf $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$ ($\Delta u = 0$). Op de rand ∂D is u voorgeschreven (in poolcoördinaten) als $u|_{\partial D} = (\cos \theta)^2$.

(a) Laat zien dat het maximum van u in $\overline{D}$ op de rand ligt en bereken het maximum van u .

(b) Bepaal de waarde van u in de oorsprong.

2. (a) Los de vergelijking

$$u_x + 2u_y = 0$$

op.

(b) Vind de oplossing die voldoet aan de beginvoorwaarde $u(0, y) = y^2$.

3. Beschouw de vierde orde vergelijking

$$u_t = -u_{xxxx}, \quad x \in [0, 1],$$

met beginwaarde $u(0, x) = f(x) \in C^0([0, 1])$ en randvoorwaarden $u_x(t, 0) = u_{xxx}(t, 0) = 0$ en $u_x(t, 1) = u_{xxx}(t, 1) = 0$.

(a) Geef de algemene oplossing m.b.v. scheiden van variabelen.

(b) Geef de formules voor de Fouriercoëfficiënten in termen van de beginfunctie f .

(c) Zij $f(x) = 1 + x^2$ op $[0, 1]$. Bereken de oplossing.

(d) Bereken $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x)$.

4. Beschouw de verstoorde warmtevergelijking

$$u_t = u_{xx} + u_x, \quad x \in \mathbb{R},$$

Beschouw de bovenstaande vergelijking op $D = \mathbb{R} \times (0, T)$ met als begin- en randvoorwaarden $u(0, x) = f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} u(x, t) = 0$.

(a) Vind de fundamentele oplossing E voor de geadjungeerde vergelijking.

(b) Leid de Greense identiteit voor de differentiaaloperator $L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}$ en laat zien dat E de Greense functie is voor het bovenstaande probleem.

(c) Leid een formule af voor de oplossing $u(x, t)$ met beginvoorwaarde $f(x)$, en beschrijf het asymptotisch gedrag.

Succes