



Tentamen (voortentamen)

Inleiding Partiële Differentiaalvergelijkingen
voor studenten Wiskunde en Natuurkunde

Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit Amsterdam

Datum: dinsdag 21 oktober 2003, 13:30–15:30 (2 uur)

Beantwoordingsinstructie: 4 opgaven; *alle antwoorden beargumenteren*.

Geen rekenmachine, geen open boek, wel formuleblad.

1. Beschouw de warmtevergelijking

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in [0, 1],$$

met beginwaarde $u(0, x) = f(x) \in C^0([0, 1])$ en randvoorwaarden $u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0$.

- (a) Geef de algemene oplossing m.b.v. scheiden van variabelen.
 - (b) Geef de formules voor de Fouriercoëfficiënten in termen van de beginfunctie f .
 - (c) Zij $f(x) = x$ op $[0, 1]$. Bereken de oplossing van de warmtevergelijking.
 - (d) Bewijs dat $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = \frac{1}{2}$ voor alle $x \in [0, 1]$.
2. Laat zien dat de oplossing in 1(c) $C^\infty([0, 1])$ is voor $t > 0$.

3. (a) Los de vergelijking

$$(1 + x^2)u_x + u_y = 0$$

op.

- (b) Vind de oplossing die voldoet aan de randvoorwaarde $u(0, y) = y^2$.
4. Beschouw de functie $f(x) = x^2$ op $[0, 1]$.
- (a) Bereken de cosinus-Fourier reeks van x^2 .
 - (b) Convergeert de Fourierreeks uniform naar x^2 op $[0, 1]$? (toelichting!)
 - (c) Gebruik de Parseval identiteit om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ uit te rekenen.

Succes