



Faculteit Exacte Wetenschappen

Vrije Universiteit

Duur: 3 uur

Tentamen

Inleiding Partiële Differentiaalvergelijkingen

1-5-2003

voor studenten Wiskunde en Natuurkunde

Tentameninstructie: maak de opgaven met duidelijke toelichting

1. (a) (3 punten) Laat zien dat

$$|\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}$$

Maak hierbij evt. gebruik van

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}, \quad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}.$$

- (b) (2 punten) Bereken

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \quad \text{en} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}.$$

- (c) (2 punten) Bereken met behulp van de gediifferentieerde reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{4(2n+1)^2 - 1}.$$

- (d) (2 punten) Bepaal de oplossing $u(x, t)$ van

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \quad (t > 0),$$

waarvoor geldt $u(x, 0) = \sin(x)$.

2. (a) (2 punten) Bepaal een functie $A(\lambda)$ zo dat voor $0 < x < 1$ geldt

$$\exp(x) = \int_0^{\infty} A(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda.$$

- (b) (2 punten) Geldt deze gelijkheid ook in $x = 0$? En in $x = 1$?

3. Deze opgave gaat over oplossingen $u(x, y)$ van de vergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

gedefinieerd voor $1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$, met $1 < R < \infty$.

- (a) (2 punten) Bepaal in poolcoördinaten $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ alle oplossingen van de vorm $u(x, y) = R(r)\Phi(\phi)$.
- (b) (2 punten) Bepaal de oplossing $u = u_R(x, y)$ die voldoet aan $u(x, y) = xy$ voor $x^2 + y^2 = 1$ en $u(x, y) = 0$ voor $x^2 + y^2 = R^2$. Bereken ook $\lim_{R \rightarrow \infty} u_R(x, y)$.
- (c) (2 punten) Dezelfde vraag als in onderdeel 3b maar nu met $u(x, y) = 1$ voor $x^2 + y^2 = 1$.

4. Deze opgave gaat over oplossingen van de eigenwaarde vergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} = \mu u$$

in de 4-dimensionale bol B_4 bepaald door $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1$. We bekijken alleen oplossingen van de vorm $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = R(r)$.

- (a) (3 punten) Laat zien dat de vergelijking voor $R(r)$ gegeven wordt door

$$R''(r) + \frac{3}{r}R'(r) = \mu R(r). \quad \text{Hint : } \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}.$$

- (b) (3 punten) Bepaal alle μ -waarden waarvoor er niet-triviale oplossingen zijn die voldoen aan $u = 0$ op de rand van B_4 . Hint: substitueer $R(r) = r^\alpha F(r)$ en kies α zó dat F voldoet aan een vergelijking die kan worden herleid tot een Besselvergelijking. De m -de Besselvergelijking wordt gegeven door

$$J''(\rho) + \frac{1}{\rho}J'(\rho) + \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)J(\rho) = 0,$$

en heeft als reguliere oplossingen alleen veelvouden van

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{m+2k},$$

met positieve nulpunten α_{mn} ($n = 1, 2, \dots$).

5. (3 punten) Bepaal $G(r, s)$ zo dat voor elke continue f de begrensde oplossing $R(r)$ van

$$R''(r) + \frac{3}{r}R'(r) = f(r), \quad 0 < r \leq 1; \quad R(1) = 0,$$

gegeven wordt door $R(r) = \int_0^1 G(r, s)f(s)ds$.

Normering: eindcijfer is 1 plus het totaal gedeeld door 3.