



Faculteit Exacte Wetenschappen

Vrije Universiteit

Duur: 2 uur

Tweede deeltentamen

Inleiding Partiële Differentiaalvergelijkingen

17-12-2002

voor studenten Wiskunde en Natuurkunde

Tentameninstructie: maak de opgaven met duidelijke toelichting

1. Deze opgave gaat over oplossingen $u(x, t)$ van

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0, t) = 0, \quad \epsilon \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) + u(1, t) = 0.$$

- (a) (2 punten) Laat $\epsilon = 0$. Bepaal alle (eigen)waarden μ waarvoor er een oplossing is van de vorm $u(x, t) = \exp(\mu t)\phi(x)$ met $\phi(x) \not\equiv 0$.
- (b) (2 punten) Laat met behulp van de vergelijking voor ϕ zien dat

$$\int_0^1 \phi_1(x)\phi_2(x)dx = 0,$$

als $\exp(\mu_1 t)\phi_1(x)$ en $\exp(\mu_2 t)\phi_2(x)$ zulke oplossingen zijn met $\mu_1 \neq \mu_2$.

- (c) (2 punten) Bepaal een (Fourier)reeks van de oplossing $u(x, t)$ ($t \geq 0$) die voldoet aan de beginvoorwaarde $u(x, 0) = 1 - x$ voor $0 \leq x \leq 1$.
- (d) (2 punten) Laat $\epsilon > 0$. Karakteriseer de eigenwaarden μ als oplossingen van één of meer vergelijkingen van de vorm $\epsilon \lambda = f(\lambda)$. Illustreer met een schets.
- (e) (2 punten) Dezelfde vraag als in onderdeel 1d maar nu voor $\epsilon < 0$.
- (f) (2 punten) Laat $\mu_0(\epsilon)$ de kleinste eigenwaarde zijn. Bepaal aan de hand van de schetsen in onderdeel 1d en 1e de limieten van $\mu_0(\epsilon)$ voor $\epsilon \downarrow 0$ en $\epsilon \uparrow 0$.

2. Deze opgave gaat over oplossingen $u(x, y)$ van de vergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

gedefinieerd voor $1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$, met $1 < R < \infty$.

- (a) (3 punten) Bepaal in poolcoördinaten $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ alle oplossingen van de vorm $u(x, y) = R(r)\Phi(\phi)$.
- (b) (2 punten) Bepaal de oplossing $u = u_R(x, y)$ die voldoet aan $u(x, y) = xy$ voor $x^2 + y^2 = 1$ en $u(x, y) = 0$ voor $x^2 + y^2 = R^2$. Bereken ook $\lim_{R \rightarrow \infty} u_R(x, y)$.
- (c) (2 punten) Dezelfde vraag als in onderdeel 2b maar nu met $u(x, y) = 1$ voor $x^2 + y^2 = 1$.

3. Deze opgave gaat over oplossingen van de eigenwaarde vergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} = \mu u$$

in de 4-dimensionale bol B_4 bepaald door $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1$. We bekijken alleen oplossingen van de vorm $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = R(r)$.

(a) (4 punten) Laat zien dat de vergelijking voor $R(r)$ gegeven wordt door

$$R''(r) + \frac{3}{r}R'(r) = \mu R(r). \quad \text{Hint : } \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}.$$

(b) (4 punten) Bepaal alle μ -waarden waarvoor er niet-triviale oplossingen zijn die voldoen aan $u = 0$ op de rand van B_4 . Hint: substitueer $R(r) = r^\alpha F(r)$ en kies α zó dat F voldoet aan een vergelijking die kan worden herleid tot een Besselvergelijking. De m -de Besselvergelijking wordt gegeven door

$$J''(\rho) + \frac{1}{\rho}J'(\rho) + \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)J(\rho) = 0,$$

en heeft als reguliere oplossingen alleen veelvouden van

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{m+2k},$$

met positieve nulpunten α_{mn} ($n = 1, 2, \dots$).

Normering: eindcijfer is 1 plus totaal gedeeld door 3.