



Faculteit Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
Tijd: 13.30-15.30

Eerste deeltentamen
Inleiding Partiële Differentiaalvergelijkingen
22-10-2002

voor studenten Wiskunde en Natuurkunde

Tentameninstructie: maak de opgaven met duidelijke toelichting

1. (a) (4 punten) De Fouriercosinusreeks van $\pi - 2x$ op het interval $[0, \pi]$ is

$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \dots$$

Laat zien dat $a_{2n} = 0$ en $a_{2n+1} = \frac{8}{\pi(2n+1)^2}$.

- (b) (2 punten) Is deze Fourierreeks uniform convergent op het interval $[0, \pi]$?
(c) (1 punten) Bepaal de constanten a, b, c , zo dat de integraal

$$\int_0^\pi (\pi - 2x - a - b \cos(x) - c \cos(2x))^2 dx$$

zo klein mogelijk is.

- (d) (2 punten) Bereken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

- (e) (2 punten) Bepaal de Fouriersinusreeks van $\pi x - x^2$ op het interval $[0, \pi]$. Hint: gebruik (a).

- (f) (2 punten) Bereken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

- (g) (Bonusopgave, 2 punten) Bereken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

2. (a) (4 punten) Bepaal functies $A(\lambda)$ en $B(\lambda)$ zo dat voor $0 < x < \pi$ geldt

$$\cos(x) = \int_0^\infty A(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda = \int_0^\infty B(\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda.$$

Maak evt. gebruik van de formules $2 \cos(A) \cos(B) = \cos(A - B) + \cos(A + B)$ en $2 \sin(A) \cos(B) = \sin(A - B) + \sin(A + B)$.

- (b) (2 punten) Gelden deze gelijkheden ook in $x = 0$? En in $x = \pi$?
(c) (3 punten) Bereken de integralen

$$\int_0^\infty \frac{x \sin(\pi x)}{1 - x^2} dx, \quad \int_0^\infty \frac{x \sin(2\pi x)}{1 - x^2} dx.$$

3. (6 punten) Bereken voor elke $\omega > 0$ de oplossing van

$$u''(t) - u(t) = \exp(\omega t), \quad u(0) = u'(0) = 0.$$

4. (a) (2 punten) Bepaal de algemene oplossing van

$$u''(x) + \frac{2}{x}u'(x) = 0 \quad (x > 0).$$

(b) (4 punten) Laat $0 < \delta < 1$. Bepaal een functie $G_\delta(x, y)$ zo dat de oplossing van

$$u''(x) + \frac{2}{x}u'(x) = f(x), \quad u'(\delta) = u(1) = 0,$$

voor elke continue functie $f(x)$ wordt gegeven door

$$u_\delta(x) = \int_\delta^1 G_\delta(x, y)f(y)dy \quad (\delta \leq x \leq 1).$$

(c) (2 punten) Bereken $u_\delta(x)$ als $f(x) = 1$.

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{4}.$$