

Enige opmerkingen vooraf:

- Als je voor het deeltentamen van oktober een resultaat ≥ 5.0 gehaald hebt *mag* je opgaven 2 t/m 5 maken.
- Als je voor deze optie kiest moet je dit **DUIDELIJK** op je blaadje aangeven.
- Om te slagen zijn dan over de opgaven 2 t/m 5 (in totaal 100 punten) *minimaal* 55 punten vereist.
- Je eindcijfer E wordt in dit geval

$$E = \frac{D + T}{2},$$

waarbij D het cijfer voor het deeltentamen is en T het cijfer voor het voor je liggende tentamen [$T = \text{puntentotaal}/10$].

- Als je niet hebt deelgenomen aan het deeltentamen of een resultaat lager dan 5.0 hiervoor hebt gehaald, ben je *verplicht* de opgaven 1 t/m 5 (in totaal 150 punten) te maken.
- Als je wel een resultaat ≥ 5.0 hebt gehaald voor het deeltentamen *mag* je ook de opgaven 1 t/m 5 maken.
- Voor een voldoende over opgaven 1 t/m 5 zijn *minimaal* 72 punten vereist.
- In dit geval wordt het aantal behaalde punten omgezet in een eindcijfer E . Eventueel voldoende resultaat voor het deeltentamen telt dan *niet* mee.

$$E = \max \left(1, \min \left(10, \text{round} \left(\frac{\text{puntentotaal}}{13} \right) \right) \right).$$

1. Gegeven is het onderstaande LP-probleem (P)

$$\min z = 28x_1 + 35x_2 + 42x_3$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 3$$

$$-3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \geq 4$$

$$5x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 1$$

$$-x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 2$$

$$x_1 \leq 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \geq 0.$$

- (a) Formuleer het duale probleem (D) van (P). Noem de duale variabelen u_1, u_2, u_3 en u_4 en de criteriumfunctie w .

Hieronder staat het (gedeeltelijk ingevulde) eindtableau van fase-2 voor het *DUALE* probleem (D). Hier zijn u_5 en $\bar{u}_6$ de surplus, respectievelijk de artificiële variabele van de eerste bijvoorwaarde van (D), $\bar{u}_7$ de artificiële variabele van de tweede bijvoorwaarde van (D) en u_8 de slack variabele van de derde bijvoorwaarde van probleem (D).

var	u_1	u_2	u_3	u_4	<i>surplus</i> u_5	$\bar{u}_6$	<i>slack</i> $\bar{u}_7$	u_8	RHS
w	?	25/7	?	3/14	5/14	?	13/14	?	?
u_3	?	-13/7	?	-4/7	-2/7	?	-1/7	?	3
u_1	?	22/7	?	13/14	3/14	?	5/14	?	13/2
u_8	?	-57/7	?	29/14	-17/14	?	-19/14	?	?

- (b) Geef de volledige oplossingen van zowel (P) als (D). Completeer het eindtableau.
- (c) Wijzig in (P) de kostencoëfficiënt van x_2 van 35 in $35 + \eta$ en bereken de nieuwe volledige oplossingen van zowel (P) als (D) als functie van η behorende bij het huidige eindtableau van (D). Bereken ook het toegelaten interval voor de kostencoëfficiënt van x_2 .
- (d) Wijzig in (P) de rechterkantcoëfficiënt van de eerste bijvoorwaarde van 3 in $3 + \theta$ en bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van θ behorende bij het huidige eindtableau van (D). Bereken weer het toegelaten interval voor de rechterkantcoëfficiënt van de eerste bijvoorwaarde.
- (e) We wijzigen nu (uitgaande van (P)) de rechterkantcoëfficiënten van de eerste twee bijvoorwaarden van 3 en 4 in resp. $3 + 2\theta$ en $4 - 3\theta$. Bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van θ en bereken voor welke waarden van θ de optimale oplossingen *niet wezenlijk* veranderen.
- (f) We wijzigen nu (uitgaande van (P)) de kostencoëfficiënten van x_1 en x_2 van 28 en 35 in resp. $28 + 2\eta$ en $35 - 3\eta$. Bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van η en bereken voor welke waarden van η de optimale oplossingen *niet wezenlijk* veranderen.
2. Cliff wil op een zo goedkoop mogelijke manier een computer aanschaffen door alle onderdelen los te kopen. Er zijn in totaal M verschillende onderdelen nodig [van elk onderdeel precies één], aangegeven met nummers 1 t/m M , die te koop zijn in N verschillende (internet)winkels. In winkel j kost een onderdeel i een bedrag c_{ij} . Als Cliff in winkel j één of

meer onderdelen koopt moet hij een bedrag v_j aan verzendkosten betalen. De verzendkosten hangen niet verder af van het aantal bij winkel j gekochte onderdelen. Cliff vraagt zich af in welke winkels hij de M onderdelen moet aanschaffen ten einde de totale aanschafkosten zo laag mogelijk te laten zijn.

- (a) Formuleer dit probleem als een mathematisch programmeringsprobleem.
- (b) Formuleer vervolgens dit probleem als een DP-(dynamisch programmerings)probleem. Beschrijf duidelijk alle elementen van de DP-algoritme (stadia, toestand, etc.).

Bij nader inzien blijkt dat de verschillende winkels aan een soort klantenbinding doen door kortingen te geven op goedkopere onderdelen als men reeds een duurder onderdeel heeft aangeschaft. Neem aan dat de onderdelen geordend zijn naar prijs, dus voor elke j geldt dat $c_{ij} < c_{kj}$ voor $i < k$. Precies gezegd, als bij winkel j het duurste gekochte onderdeel onderdeel i is, dan kunnen de onderdelen k [$k < i$] in winkel j worden aangeschaft voor een bedrag $(M - i + 1)c_{kj}/(M - i + k)$. We zien uit deze formule dat de [procentuele] korting groter is naarmate het duurste gekochte onderdeel duurder is of de minder dure gekochte onderdelen duurder zijn. Opnieuw vraagt Cliff zich af welke onderdelen hij waar moet aanschaffen om zo goedkoop mogelijk uit te zijn bij de aanschaf van de onderdelen.

- (c) Formuleer het nieuwe probleem weer als een DP-probleem.
3. Bij de lopende formatiebesprekingen is de prangende vraag welke regeringscoalitie van minstens twee partijen de komende jaren ons land moet regeren. Van de politieke partijen [1=CDA, 2=PvdA, 3=SP, 4=VVD, 5=PVV, 6=GL, 7=CU, 8=D66, 9=SGP en 10=PvdD] zijn de zetelaantallen bekend: partij i heeft a_i zetels. Verder is bekend hoe de partijen denken over een aantal essentiële onderwerpen, zoals integratie, onderwijs, gezondheidszorg, etc. Laten er in totaal M onderwerpen zijn die bij de formatie een rol spelen. Over al deze onderwerpen denken de partijen verschillend en we nemen aan dat deze onderlinge verschillen in opvatting uit te drukken zijn in een getal tussen 0 [=volledig eens] en 20 [=volstrekt onverenigbaar]. Laat $v_{\{ij\}k}$ het verschil in opvatting zijn over onderwerp k tussen de partijen i en j [met $\{ij\}$ in de index geven we aan dat de volgorde tussen i en j er niet toe doet; $v_{\{37\}8}$ is hetzelfde getal als $v_{\{73\}8}$]. De kracht van een regeringscoalitie wordt niet alleen bepaald door het aantal zetels van de participerende partijen, maar ook door een soort interne cohesie die tot uiting komt doordat de verschillen in opvatting over de essentiële onderwerpen niet al te groot zijn. Wiskundig definiëren we de *heterogeniteit* van een coalitie $C \subset \{1, 2, \dots, 10\}$ als het getal

$$H(C) := \sum_{k=1}^M \sum_{i,j \in C: i \neq j} v_{\{ij\}k}.$$

Dus, naarmate een coalitie C minder cohesie vertoont en/of uit meer partijen bestaat zal de heterogeniteit $H(C)$, zoals hierboven gedefinieerd, toenemen. Zoals we weten kan een regeringscoalitie alleen besluiten aangenomen krijgen als een meerderheid van het parlement de besluiten steunt. Dat kan een probleem worden als een regeringscoalitie C niet verzekerd is van een meerderheid omdat het totale aantal zetels van de coalitie C , d.w.z. $\sum_{i \in C} a_i$, kleiner is dan 76. Daarom zal een zogenaamde minderheidscoalitie regelmatig een beroep moeten doen op gedoogsteun van andere dan de coalitiepartijen. Alle partijen hebben laten weten dat zij elk regeringsvoorstel omtrent onderwerp k zullen steunen mits hun verschil in opvatting [m.b.t. k] met alle coalitiepartijen hoogstens 4 punten bedraagt. Precies gezegd, partij $i \notin C$ zal een voorstel omtrent onderwerp k van de coalitie C altijd steunen als voor alle partijen $j \in C$ geldt dat $v_{\{ij\}k} \leq 4$. De vraag is nu welke regeringscoalitie met minimale heterogeniteit in staat zal zijn al zijn voorstellen door het parlement te loodsen, eventueel

met gedoogsteun. Formuleer dit probleem als een [geheeltallig] programmeringsprobleem. *Aanwijzing:* Introduceer de volgende beslissingsvariabelen. Voor $i \neq j$ [volgorde irrelevant!],

$$x_{\{ij\}} = \begin{cases} 1 & \text{als partijen } i \text{ en } j \text{ beide in de regeringscoalitie zitten} \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

Er zijn in totaal dus 45 variabelen $x_{\{ij\}}$! Voor $i \neq j$ [volgorde nu relevant!] en $k = 1, \dots, M$,

$$y_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{als oppositiepartij } i \text{ m.b.t. onderwerp } k \text{ coalitiepartij } j \text{ zal steunen} \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

$$u_i = \begin{cases} 1 & \text{als partij } i \text{ in de regeringscoalitie zit} \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

$$w_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{als partij } i \text{ gedoogsteun aan de coalitie geeft m.b.t. onderwerp } k \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

- Beschrijf de criteriumfunctie met de gesuggereerde beslissingsvariabelen.
- Geef de bijvoorwaarden die afdwingen dat alle voorstellen van de regeringscoalitie, eventueel met gedoogsteun, worden aangenomen.
- Interpreteer de onderstaande bijvoorwaarden [voor alle mogelijke i, j, k],

$$x_{\{ij\}} + x_{\{jm\}} - 1 \leq x_{\{im\}}, \quad u_i \leq \sum_{j: j \neq i} x_{\{ij\}} \leq 9u_i, \quad x_{\{ij\}} + y_{ijk} + y_{jik} \leq 1, \quad v_{\{ij\}k} y_{ijk} \leq 4u_j,$$

$$\sum_{\{ij\} \subset \{1, \dots, 10\}} x_{\{ij\}} \geq 1, \quad \sum_{j=1}^{10} u_j - \sum_{j=1}^{10} y_{ijk} \leq 10(1 - w_{ik}).$$

- Beschrijf tenslotte het volledige geheeltallige programmeringsprobleem.

4. Gegeven is een stratenplan dat gerepresenteerd kan worden als een gerichte graaf $G = (X, E)$ bestaande uit N kruispunten (knopen), dus $X = \{1, 2, \dots, N\}$. Elke kant $(i, j) \in E$ stelt een stuk straat voor van een kruising i naar een volgende kruising j . Met elk stuk straat $(i, j) \in E$ is een getal p_{ij} verbonden dat staat voor de kans dat een wandelaar op dat stuk straat *niet* overvallen wordt. We zijn geïnteresseerd in de veiligste wandeling (in graaf-termen: pad) van kruising 1 naar kruising N .

- Beschrijf dit probleem als een mathematisch programmeringsprobleem.
- Beschrijf in detail de labeling-algoritme waarmee we het in onderdeel (a) geformuleerde probleem kunnen oplossen. Hoe heet deze algoritme?
- Laat nu een stratenplan gegeven zijn met 8 kruisingen (knopen) en kansen op de stukken straat (kanten) zoals aangegeven in de onderstaande tabel. Pas de in onderdeel (b) bedoelde algoritme toe op deze graaf om het veiligste pad van 1 naar 8 te vinden. Geef in elke iteratie duidelijk de labels weer. *Aanwijzing:* Neem $\dots$ -logarithmen!!

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	1/9	1/3	1/27	1/243	-	-	-
2	-	-	1/81	1/9	1/729	1/3	-	1/27
3	-	1/27	-	1/2187	1/3	1/243	1/6561	-
4	-	1/3	1/9	-	1/81	1/19683	1/27	1/243
5	-	-	1/2187	1/729	-	1/27	1/9	1/2187
6	-	1/81	-	-	1/6561	-	1/9	1/243
7	-	-	-	-	1/729	1/3	-	1/27

5. Onze goede vriend Mark Rutte heeft tijdens zijn verblijf op het ministerie van onderwijs en wetenschappen [O&W] een systeem bedacht waarmee studenten zelf het aantal af te leggen tentamens mogen bepalen nodig voor het behalen van hun universitaire bul. Aan deze toegenomen vrijheid hangt wel een prijskaartje: elke tentamen mag slechts één keer worden afgelegd. Zodra een student zakt vervallen al zijn resultaten en moet hij van voren af aan beginnen. De faculteit bepaalt voor elke studierichting het maximale aantal af te leggen tentamens. Laat dit aantal voor de studie econometrie M zijn. Deze M tentamens worden geordend naar de vereiste voorkennis. Precies gezegd, tentamen 1 vereist in het geheel geen voorkennis, tentamen 2 vereist als voorkennis de stof van tentamen 1, etc. Dus tentamen M vereist als voorkennis alle stof van de tentamens 1 t/m $M - 1$. Anders geformuleerd, de stof van tentamen i omvat de stof van tentamen j voor alle $j < i$. Elke student moet in ieder geval tentamen M doen, maar daarbij heeft hij de mogelijkheid zoveel van de stof van de minder omvangrijke tentamens op zijn laptop tijdens het tentamen beschikbaar te hebben als hij wil. Als hij besluit tentamen i te maken, en daarbij geen gebruik te maken van de stof van tentamen j [uiteraard $j < i$], dan mag hij het tentamen j overslaan. De volgorde waarin de student de tentamens aflegt mag hij volledig zelf bepalen. De traditionele volgorde is natuurlijk $1, 2, \dots, M$, maar daar wil Mark met zijn nieuwe systeem nu juist een eind aan maken. In het extreme geval doet een student tentamen M zonder enige voorkennis op zijn laptop te zetten, en deze student krijgt dan onmiddellijk zijn bul als hij voor tentamen M slaagt. Op het ministerie heeft Mark door onderwijskundigen laten uitrekenen dat het slagingspercentage voor het tentamen i gelijk is aan $p_i \cdot 100$ procent in geval geen gebruik wordt gemaakt van de stof van de tentamens $j + 1$ t/m $i - 1$, maar wel van de stof van tentamen j . De vraag is nu welke tentamens een student moet maken ten einde de kans zijn bul te halen zonder ooit voor een tentamen te zakken te maximaliseren.

- (a) Met welke efficiënte algoritme kunnen we dit probleem oplossen. Formuleer deze algoritme gedetailleerd eerst in algemene termen en beschrijf vervolgens in detail hoe deze algoritme in het onderhavige probleem moet worden toegepast.

Hoewel het hierboven beschreven systeem nooit is ingevoerd omdat Mark Rutte voortijdig O&W verlaten heeft in verband met zijn verkiezing tot lijsttrekker bij de VVD, is wel uitgelekt dat er aan een dergelijk systeem gewerkt is. De universiteiten zijn 'not amused' te horen dat er opnieuw in Den Haag gemorreld wordt aan hun autonomie. Daarom laat de VSNU [=Vereniging van Samenwerkende Universiteiten] uit voorzorg vast uitzoeken hoe dit systeem uitpakt als de eis wordt toegevoegd dat een student minimaal N tentamens moet doen [$N < M$]. De VSNU vraagt zich af welke tentamens een student dan zal doen. De criteriumfunctie blijft natuurlijk dezelfde: de kans om zonder te zakken de bul te halen.

- (b) Formuleer dit gewijzigde probleem met een techniek naar keuze.

Puntenwaardering

opgave	a.	b.	c.	d.	e.	f.
1.	5	5	10	10	10	10
2.	10	10	5	-	-	-
3.	10	10	10	5	-	-
4.	5	10	10	-	-	-
5.	10	5	-	-	-	-

Het eindcijfer over de opgaven 1 t/m 5 wordt als volgt bepaald,

$$\text{eindcijfer} = \max \left(1, \min \left(10, \text{round} \left(\frac{\text{puntentotaal}}{13} \right) \right) \right).$$

Merk op dat voor een 10 slechts 124 punten vereist zijn (van de 150)!