

Enige opmerkingen vooraf:

- Als je voor het deeltentamen van oktober een resultaat ≥ 5.0 gehaald hebt *mag* je opgaven 2 t/m 5 maken.
- Als je voor deze optie kiest moet je dit **DUIDELIJK** op je blaadje aangeven.
- Om te slagen zijn dan over de opgaven 2 t/m 5 (in totaal 105 punten) *minimaal* 60 punten vereist.
- Je eindcijfer E wordt in dit geval

$$E = \frac{D + T}{2},$$

waarbij D het cijfer voor het deeltentamen is en T het cijfer voor het voor je liggende tentamen [$T = \text{round}(\text{puntentotaal}/10)$].

- Als je niet hebt deelgenomen aan het deeltentamen of een resultaat lager dan 5.0 hiervoor hebt gehaald, ben je *verplicht* de opgaven 1 t/m 5 (in totaal 150 punten) te maken.
- Als je wel een resultaat ≥ 5.0 hebt gehaald voor het deeltentamen *mag* je ook de opgaven 1 t/m 5 maken.
- Voor een voldoende over opgaven 1 t/m 5 zijn *minimaal* 72 punten vereist.
- In dit geval wordt het aantal behaalde punten omgezet in een eindcijfer E . Eventueel voldoende resultaat voor het deeltentamen telt dan *niet* mee.

$$E = \max \left(1, \min \left(10, \text{round} \left(\frac{\text{puntentotaal}}{13} \right) \right) \right).$$

1. Gegeven is het onderstaande LP-probleem (P)

$$\max z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4$$

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 \geq 28$$

$$4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 35$$

$$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 6x_4 \leq 42$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Hieronder staat het (gedeeltelijk ingevulde) eindtableau van fase-2 voor het probleem (P). Hier zijn x_5 en $\bar{x}_6$ de surplus respectievelijk de artificiële variabele van de eerste bijvoorwaarde, $\bar{x}_7$ de artificiële variabele van de tweede bijvoorwaarde en x_8 de slack variabele van de derde bijvoorwaarde.

var	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	x_8	RHS
z	?	25/7	?	3/14	5/14	?	13/14	?	?
x_3	?	-13/7	?	-4/7	-2/7	?	-1/7	?	3
x_1	?	22/7	?	13/14	3/14	?	5/14	?	13/2
x_8	?	-57/7	?	29/14	-17/14	?	-19/14	?	?

- Formuleer het duale probleem (D) van (P) en geef de *volledige* oplossingen van zowel (P) als (D). Vul ook het eindtableau volledig in.
 - Wijzig in (P) de rechterkantcoëfficiënt van de tweede bijvoorwaarde van 35 in $35 + \theta$ en bereken de nieuwe volledige oplossingen van zowel (P) als (D) als functie van θ behorende bij het huidige eindtableau. Bereken ook het toegelaten interval voor de rechterkantcoëfficiënt van de tweede bijvoorwaarde.
 - Wijzig in (P) de opbrengstcoëfficiënt van x_1 van 3 in $3 + \eta$ en bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van η behorende bij het huidige eindtableau. Bereken weer het toegelaten interval voor de opbrengstcoëfficiënt van x_1 .
 - We wijzigen nu (uitgaande van (P)) de opbrengstcoëfficiënten van x_1 en x_2 van 3 en 4 in resp. $3 + 2\eta$ en $4 - 3\eta$. Bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van η en bereken voor welke waarden van η de optimale oplossingen *niet* *wezenlijk* veranderen.
 - We wijzigen nu (uitgaande van (P)) de rechterkantcoëfficiënten van de eerste en de tweede bijvoorwaarde van 28 en 35 in resp. $28 + 2\theta$ en $35 - 3\theta$. Bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van θ en bereken voor welke waarden van θ de optimale oplossingen *niet* *wezenlijk* veranderen.
2. Voor de eerstvolgende studiereis naar Hongkong is de belangstelling zó groot dat de reiscommissie zich voor een lastig keuzeprobleem geplaatst ziet. De potentiële deelnemers zijn afkomstig uit N verschillende cohorten. Cohort j bestaat uit M_j studenten die zich voor de reis hebben aangemeld. Elke student wordt beoordeeld op twee criteria, zijn/haar sociale intelligentie en zijn/haar wetenschappelijke attitude. De reiscommissie kijkt wat het laatste betreft naar het totaal aantal tot nu toe behaalde studiepunten (een getal tussen 100 en 200), en wat betreft het eerste criterium wordt aan elke student een getal (sociale index)

gekoppeld tussen 0 (een absolute 'nerd') en 10 (de ideale schoonzoon/dochter). De precieze gegevens zijn als volgt: student i van cohort j heeft w_{ij} studiepunten gehaald en heeft een sociale index gelijk aan t_{ij} ($i = 1, \dots, M_j; j = 1, \dots, M_j$). De vraag is vervolgens hoe deze twee criteria gebruikt moeten worden voor het selecteren van de studenten. In ieder geval moeten uit elk cohort minstens 4 studenten meegaan en in totaal hoogstens 25, omdat de docenten deze eis als noodzakelijke voorwaarde voor hun financiële bijdrage hebben gesteld. De voorzitter van de reiscommissie, de op vele fronten actieve Aafke B., stelt voor de groepjes studenten uit de verschillende cohorten voornamelijk te selecteren op hun sociale intelligentie. De vice-voorzitter Dirk V. vreest dat het volgen van de richtlijn van Aafke zal leiden tot een wat al te gezellige studiereis en dat dit ten koste zal gaan van het wetenschappelijk karakter. Hij stelt voor dat in ieder geval het totale aantal behaalde studiepunten van de deelnemers minstens 3000 moet zijn. Na enig heen en weer praten kan iedereen in de reiscommissie hiermee akkoord gaan en men besluit nu te streven naar een maximale totale sociale intelligentie van de deelnemers (sociale intelligentie additief!), onder de eis dat de deelnemers tezamen minstens 3000 studiepunten gehaald hebben.

- (a) Formuleer dit probleem als een DP-(dynamisch programmerings)probleem. Beschrijf duidelijk alle elementen van de DP-algoritme (stadia, toestand, beslissing, etc.).

Uit de oplossing van onderdeel (a) blijkt dat er wel erg veel studievoorstellen geselecteerd worden met wie je hoogstens een partijtje kunt schaken. Voor Aafke is de lol er een beetje af, en zij dreigt zich terug te trekken uit de reiscommissie als er geen andere groep deelnemers wordt samengesteld. Haar goede vriend Ludo N. fluistert haar in voor te stellen de studenten zó te selecteren dat de *minimale* sociale intelligentie van de deelnemers maximaal is, nog steeds onder de voorwaarde dat aan de verlangens van Dirk voldaan wordt.

- (b) Formuleer het nieuwe probleem weer als een DP-probleem.

- (c) Aan welke aanpak [(a) of (b)] geef jij de voorkeur? Licht kort je antwoord toe.

3. Lilit en Sana spelen het volgende spel. Lilit schrijft onzichtbaar voor Sana een getal op een papiertje uit de verzameling 1 t/m 7. Sana op haar beurt kiest een letter uit de verzameling A t/m E en schrijft deze letter, onzichtbaar voor Lilit, ook op een papiertje. Als Sana een A (E) kiest dan betaalt (ontvangt) Lilit aan (van) Sana een bedrag van 5 euro/als Lilit een drievoud (3 of 6) kiest, ontvangt (betaalt) Lilit van (aan) Sana een bedrag van 3 euro als Lilit een priemgetal ongelijk 3 kiest, en ontvangt (betaalt) Lilit 4 euro als zij één van de overige getallen kiest (1 of 4). Als Sana B (D) kiest dan ontvangt (betaalt) Lilit van (aan) Sana een bedrag van 6 euro als Lilit een drievoud kiest, betaalt (ontvangt) Lilit aan (van) Sana een bedrag van 7 euro als zij een priemgetal ongelijk drie kiest, en ontvangt (betaalt) Lilit 2 euro van (aan) Sana als zij 1 of 4 kiest. Tenslotte, als Sana C kiest dan ontvangt Lilit van Sana een bedrag van 9 euro als zij een even getal kiest en betaalt zij aan Sana een bedrag van 8 euro als zij een oneven getal kiest.

- (a) Schrijf de uitbetalingstabel op voor Lilit, d.w.z. $a_{ij} \in \mathbb{R}$ is het bedrag dat Lilit *ontvangt* van Sana als Lilit i speelt en Sana j [$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; j = A, B, C, D, E$]
- (b) Laat v de minimale verwachte winst van Lilit zijn als zij de gemengde strategie $(y_1, \dots, y_7)$ speelt. Formuleer nu het LP-probleem waarmee de optimale gemengde strategie van Lilit berekend kan worden die haar minimale verwachte winst maximaliseert (de zogenaamde *maximin* strategie van Lilit).
- (c) Laat w de maximale verwachte winst van Lilit zijn als Sana de gemengde strategie $(x_A, \dots, x_E)$ speelt. Formuleer nu het LP-probleem waarmee de optimale strategie van Sana berekend kan worden die de maximale verwachte winst van Lilit minimaliseert (de zogenaamde *minimax* strategie van Sana).

- (d) Formuleer het duale probleem van het LP-probleem uit onderdeel (a).
- (e) Toon aan dat v^* , de maximale minimale verwachte winst van Lilit, behorende bij de maximin strategie van Lilit, gelijk is aan w^* , de minimale maximale verwachte winst van Lilit, behorend bij de minimax strategie van Sana.
4. Gegeven is een stratenplan dat gerepresenteerd kan worden als een gerichte graaf $G = (X, E)$ bestaande uit N kruispunten (knopen), dus $X = \{1, 2, \dots, N\}$. Elke kant $(i, j) \in E$ stelt een stuk straat voor van een kruising i naar een volgende kruising j . Met elk stuk straat $(i, j) \in E$ is een getal p_{ij} verbonden dat staat voor de kans dat een wandelaar op dat stuk *niet* overvallen wordt. We zijn geïnteresseerd in de veiligste wandeling (in graaf-termen: pad) van kruising 1 naar kruising N .
- (a) Beschrijf dit probleem als een mathematisch programmeringsprobleem.
- (b) Beschrijf in detail de labeling-algoritme waarmee we het in onderdeel (a) geformuleerde probleem kunnen oplossen. Hoe heet deze algoritme?
- (c) Laat nu een stratenplan gegeven zijn met 8 kruisingen (knopen) en kansen op de stukken straat (kanten) zoals aangegeven in de onderstaande tabel. Pas de in onderdeel (b) bedoelde algoritme toe op deze graaf om het veiligste pad van 1 naar 8 te vinden. Geef in elke iteratie duidelijk de labels weer. *Aanwijzing: Neem 2-logaritmen!!*

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	1/4	1/2	1/8	1/32	-	-	-
2	-	-	1/16	1/4	1/64	1/2	-	1/512
3	-	1/8	-	1/128	1/2	1/32	1/256	-
4	-	1/2	1/4	-	1/16	1/512	1/8	1/32
5	-	-	1/128	1/64	-	1/8	1/4	1/128
6	-	1	-	-	1/256	-	1/4	1/16
7	-	-	-	-	1/64	1/2	-	1/4

5. Het bedrijf Compufix produceert M verschillende soorten computers. Computers van type i [vanaf nu i -computers] zijn duurder dan computers van type j voor $i > j$. De vraag naar i -computers is gelijk aan D_i en de variabele productiekosten van een i -computer bedragen C_i . Het bedrijf is gedwongen de verschillende typen computers na elkaar te produceren. Aan het opstarten van een productierun voor i -computers zijn vaste opstartkosten K_i verbonden. Omdat deze bedragen erg hoog zijn wil Compufix als het enigszins kan vermijden alle typen in productie te nemen. Het bedrijf biedt daarom zijn klanten die k -computers vragen aan een duurdere i -computer te accepteren voor een gering *extra* bedrag α_{ik} (dus $i > k$). Compufix heeft voor een i -computer een verkoopprijs V_i vastgesteld, maar besluit nu met een bedrag $V_k + \alpha_{ik}$ genoeg nemen als het een i -computer levert om te voldoen aan de vraag naar een k -computer. Uiteraard zal moeten gelden dat $V_i > V_k + \alpha_{ik} > C_i$ voor alle $k < i$, omdat anders geen enkele klant op het aanbod zal ingaan (eerste ongelijkheid), of het aanbod voor Compufix verliesgevend zou zijn (tweede ongelijkheid). Alle klanten nemen het aanbod aan, welke duurdere computer zij eventueel ook aangeboden krijgen. Compufix vraagt zich nu af welke computers in productie moeten worden genomen om zijn totale winst te kunnen maximaliseren. De harde eis geldt dat aan alle vraag voldaan moet worden.
- (a) Met welke efficiënte algoritme kunnen we dit probleem oplossen. Formuleer deze algoritme gedetailleerd eerst in algemene termen en beschrijf vervolgens in detail hoe deze algoritme in het onderhavige probleem moet worden toegepast.

Als Compufix geconfronteerd wordt met het optimale productieschema uit onderdeel (a) is het bedrijf ontevreden over de totale winst. Dit komt ongetwijfeld door een wat te ruimhartig

aanbod, in casu de bedragen α_{ik} zijn door Compufix te laag gekozen. Compufix vraagt nu eerst aan de marketing-afdeling wat het *maximale extra* bedrag is dat een klant die een i -computer vraagt bereid is te betalen voor een k -computer. Dit blijkt $0.1(i - k)V_k$ te zijn. Uit concurrentieoverwegingen wil Compufix de extra bedragen zo laag mogelijk houden, en dus niet deze maximale bedragen vragen. Aan de andere kant wil het bedrijf wel verzekerd zijn van een minimale totale winst W . De vraag is daarom nu wat het minimale totale extra bedrag is dat aan de klanten in rekening gebracht zal worden voor het leveren van een duurdere computer dan de gevraagde, onder de voorwaarde dat een totale winst W gegarandeerd is. Er zij nog opgemerkt dat we (voor de eenvoud) het model zó kiezen dat alle klanten die i -computers vragen hetzelfde type computer geleverd krijgen. De vraag is alleen welk type.

- (b) Formuleer dit nieuwe probleem als een gemengd geheeltallig lineair programmeringsprobleem. *Aanwijzing:* Introduceer de volgende beslissingsvariabelen voor $i \geq k$

$$x_{ik} = \text{het bedrag dat nu de rol van } \alpha_{ik} \text{ speelt [nu niet vast!!! } x_{ii} = 0],$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{als } i\text{-computers geleverd worden voor } k\text{-computers,} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Neem in ieder geval de onderstaande bijvoorwaarden op [geef de interpretaties!!]

$$x_{ik} \leq 0.1(i - k)V_k y_{ik}, \quad \text{voor alle } i > k.$$

$$\sum_{k=1}^i y_{ik} \leq M y_{ii}, \quad \text{voor } i = 1, \dots, M.$$

Puntenwaardering

opgave	a.	b.	c.	d.	e.
1.	5	10	10	10	10
2.	10	10	5	-	-
3.	5	10	10	5	5
4.	5	10	10	-	-
5.	10	10	-	-	-

Het eindcijfer over de opgaven 1 t/m 5 wordt als volgt bepaald,

$$\text{eindcijfer} = \max \left(1, \min \left(10, \text{round} \left(\frac{\text{puntentotaal}}{13} \right) \right) \right).$$

Merk op dat voor een 10 slechts 124 punten vereist zijn (van de 150)!