

1. Gegeven is het onderstaande LP-probleem (P)

$$\max z = 5x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 = 25$$

$$3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \geq 12$$

$$6x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 30$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Het programma SIMOPT geeft de onderstaande output voor het probleem (P).

Last Iteration

|          | X1 | X2 | X3    | Art.1 | Surp.2 | Art.2 | Slack3 | RHS |
|----------|----|----|-------|-------|--------|-------|--------|-----|
| Rel.Cost | ?? | ?? | 1.25  | ??    | ??     | ??    | ??     | ??  |
| Surp.2   | ?? | ?? | -3.75 | 1.61  | 1.00   | -1.00 | -0.04  | ??  |
| X2       | ?? | ?? | -0.50 | 0.21  | 0.00   | 0.00  | -0.07  | ??  |
| X1       | ?? | ?? | 0.75  | -0.04 | 0.00   | 0.00  | 0.18   | ??  |

|                            |                |              |
|----------------------------|----------------|--------------|
| Value Objective Function : |                | 12.6786      |
| Variable                   | Activity Level | Reduced Cost |
| -----                      | -----          | -----        |
| X1                         | : 4.4643       | 0.0000       |
| X2                         | : 3.2143       | 0.0000       |
| X3                         | : 0.0000       | 1.2500       |

|              |                  |               |
|--------------|------------------|---------------|
|              | Slack of Surplus | Shadow prices |
| -----        |                  |               |
| Constraint 1 | 0.0000           | -0.8214       |
| Constraint 2 | 27.1071          | -0.0000       |
| Constraint 3 | 0.0000           | 1.1071        |

Objective Coefficient Ranges

|          |             |                         |
|----------|-------------|-------------------------|
|          | Current     |                         |
| Variable | Coefficient | Allowed Interval        |
| -----    |             |                         |
| X1       | 5.0000      | [ 3.3333 , Infinity ]   |
| X2       | -3.0000     | [ -Infinity , -0.5000 ] |
| X3       | 4.0000      | [ ?????? , ?????? ]     |

Right-Hand-Side Ranges

|            |         |                         |
|------------|---------|-------------------------|
|            | Current |                         |
| Constraint | RHS     | Allowed Interval        |
| -----      |         |                         |
| 1.         | 25.0000 | [ ?????? , ?????? ]     |
| 2.         | 12.0000 | [ -Infinity , 39.1071 ] |
| 3.         | 30.0000 | [ 5.0000 , 75.0000 ]    |

- (a) Formuleer het duale probleem (D) van (P) en geef de *volledige* oplossingen van zowel (P) als (D). Vul ook het eindtableau volledig in.
- (b) Wijzig in (P) de rechterkantcoëfficiënt van de eerste bijvoorwaarde van 25 in  $25 + \theta$  en bereken de nieuwe volledige oplossingen van zowel (P) als (D) als functie van  $\theta$  behorende bij het huidige eindtableau. Bereken ook het toegelaten interval voor de rechterkantcoëfficiënt van de eerste bijvoorwaarde.
- (c) Wijzig in (P) de opbrengstcoëfficiënt van  $x_3$  van 4 in  $4 + \eta$  en bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van  $\eta$  behorende bij het huidige eindtableau. Bereken weer het toegelaten interval voor de opbrengstcoëfficiënt van  $x_3$ .
- (d) We wijzigen nu (uitgaande van (P)) de opbrengstcoëfficiënten van  $x_1$  en  $x_3$  van 5 en 4 in resp.  $5 + 2\eta$  en  $4 - 3\eta$ . Bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van  $\eta$  en bereken voor welke waarden van  $\eta$  de optimale oplossingen *niet* *wezenlijk* veranderen.
2. In het kader van het ontwikkelen van een breed bachelor programma voor de exacte studierichtingen wordt de commissie BBC (Brede Bachelor Commissie) samengesteld bestaande uit  $M$  docenten, van elke studierichting één. De commissie BBC heeft tot taak een nieuw basisvak 'Aanfluiting' te ontwikkelen, waarmee voor de studenten de overgang van het VWO naar de universiteit 'gefaciliteerd' wordt, zoals dat in modieus jargon heet. In dit vak zal een aantal onderwerpen aan bod moeten komen die gerekend kunnen worden tot de noodzakelijke canon voor de exacte studies. Enig vooroverleg heeft geleid tot een collectie van  $N$  onderwerpen (hier genummerd van 1 t/m  $N$ ) waaruit een keuze gemaakt moet worden die voor elke studierichting aanvaardbaar is. Gezien het grote aantal onderwerpen en de omvang van de onderwerpen, is het niet mogelijk al deze onderwerpen in het vak Aanfluiting op te nemen. Er zal een keuze gemaakt moeten worden op grond van een tweetal criteria: relevantie en tijdsbesteding. Om tot een rationele beslissing te kunnen komen wordt door alle docenten voor elk onderwerp een relevantie-waarde (geheel getal tussen 0 en 10) vastgesteld en een tijdsbesteding (in college-uren) gegeven. Precies gezegd, docent  $i$  waardeert onderwerp  $j$  voor zijn/haar studie met de 'relevantie-waarde'  $r_{ij}$  en hij/zij wil  $t_{ij}$  college-uren aan onderwerp  $j$  besteden ( $i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$ ). Vervolgens rijst de vraag hoe we met deze kwantitatieve gegevens tot een beslissing kunnen komen, d.w.z. tot een deelcollectie van onderwerpen die optimaal (in nader te bepalen zin) genoemd kan worden. De Onderwijsdirectie verordonneert dat voor het vak Aanfluiting in totaal hoogstens  $T$  college-uren beschikbaar zijn. De commissie BBC besluit nu te opteren voor de deelcollectie  $A \subset \{1, 2, \dots, N\}$  van onderwerpen waarvoor de totale som van de relevantie-waarden, d.w.z.

$$\sum_{j \in A} \sum_{i=1}^M r_{ij}$$

zo groot mogelijk is, waarbij aan elk opgenomen onderwerp  $j$  een aantal college-uren besteed wordt dat gelijk is aan het met de relevantie-waarden gewogen gemiddelde van de door de diverse docenten vastgestelde tijdsbesteding. Dus als onderwerp  $j$  in het vak Aanfluiting wordt opgenomen zullen aan onderwerp  $j$

$$\sum_{i=1}^M \frac{r_{ij}}{\sum_{k=1}^M r_{kj}} t_{ij}$$

college-uren besteed worden.

- (a) Formuleer dit probleem als een DP-(dynamisch programmerings)probleem. Beschrijf duidelijk alle elementen van de DP-algoritme (stadia, toestand, beslissing, etc.)

Bij nader inzien is de commissie BBC niet erg te spreken over het resultaat van onderdeel (a). Daarom stelt dr. Dekwaadsteniet van de studie Econometrie voor de stricte tijdslimiet van hoogstens  $T$  college-uren los te laten en meer te letten op het niveau van de nieuwe cursus. Hij suggereert nu dat elke docent zijn/haar ideale deelcollectie aan onderwerpen bepaalt die binnen de tijdslimiet van  $T$  college-uren blijft. Laat voor docent  $i$  deze ideale collectie  $C_i$  zijn ( $i = 1, \dots, M$ ). Dan zal voor alle  $i$  gelden

$$\sum_{j \in C_i} t_{ij} \leq T, \quad \text{maar} \quad \sum_{j \in \bigcup_{i=1}^M C_i} t_{ij} \gg T.$$

Hoewel dr. Dekwaadsteniet de tijdslimiet wil los laten is hij de redelijkheid zelve en hij begrijpt dat het niet mogelijk is alle onderwerpen uit  $\bigcup_{i=1}^M C_i$  op te nemen. De vraag is daarom welke onderwerpen uit  $\bigcup_{i=1}^M C_i$  weg te laten. Dr. Dekwaadsteniet bepaalt nu de relevantie van onderwerp  $j$  als

$$R_j := \sum_{i: j \in C_i} r_{ij} \quad [\text{dit is een sommatie over } i, j \text{ is vast!!}]$$

en hij beschrijft het weglaten van onderwerp  $j$  als een 'relevantie-verlies' ter grootte  $R_j$ . Vervolgens formuleert hij voor zijn collega's het volgende optimaliteitscriterium: kies de deelcollectie  $A \subset \bigcup_{i=1}^M C_i$  die zo min mogelijk college-uren vereist waarvoor het totale relevantie-verlies hoogstens  $L$  bedraagt. Dr. Dekwaadsteniet stelt daarbij wel voor aan elk op te nemen onderwerp  $j$  in totaal

$$T_j := \max\{t_{ij} \mid i: j \in C_i\} \quad [\text{maximum genomen over de } i, j \text{ vast!!}]$$

college-uren te besteden.

- (b) Formuleer het probleem opnieuw als een DP-probleem, maar nu volgens het criterium van Dr. Dekwaadsteniet. Beschrijf weer stadium, toestand, beslissingen, et cetera.

Zoals te verwachten was kan het voorstel van dr. Dekwaadsteniet geen genade vinden bij de Onderwijsdirectie die niet wil afwijken van het strakke tijdschema. Dr. Dekwaadsteniet, altijd gehoorzaam aan degenen die boven hem gesteld zijn, wil aan de tijd-eisen van de Onderwijsdirectie tegemoet komen, maar hij wil wel zijn idee van een beperking van het relevantie-verlies handhaven.

- (c) Hoe kun je het voorstel van dr. Dekwaadsteniet flexibel maken zodat ook aan de verlangens van de Onderwijsdirectie wordt tegemoet gekomen? Welk criterium (a) of (b) heeft dan jouw voorkeur? Geef kort commentaar.

3. In verpleeghuis Avondrood heeft men te kampen met een nijpend tekort aan personeel. Er zijn  $N$  bewoners die elke 24 uur  $M$  soorten verzorging behoeven (wassen, aankleden, eten, etc.) die voor het personeel evenzovele taken omvatten. Voor bewoner  $j$  vereist taak  $i$  een tijd  $t_{ij}$  van een verzorger ( $i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$ ). Er zijn in totaal  $Q$  verzorgers werkzaam in Avondrood, die elk uiteraard aan slechts één taak tegelijk kunnen werken. Voor elke taak geldt een tijdvenster  $[a_i, b_i]$  waarbinnen taak  $i$  voor *alle* bewoners moet worden uitgevoerd. De tijdvensters voor de verschillende taken zijn paarsgewijs disjunct ( $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_M < b_M$ ). Verschillende taken voor één bewoner kunnen eventueel door verschillende verzorgers worden uitgevoerd. Elk personeelslid werkt regulier 8 uur per etmaal. Uiteraard geldt voor elke taak  $i$ ,

$$\max\{t_{ij} : 1 \leq j \leq N\} \leq b_i - a_i \quad \text{en} \quad \frac{\sum_{j=1}^N t_{ij}}{Q} \leq b_i - a_i,$$

omdat het anders fysiek al niet mogelijk is alle bewoners de volledige verzorging te geven. Het personeelstekort komt tot uiting door het gegeven dat

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M t_{ij} > 8Q,$$

in woorden, de totale tijd nodig voor het verzorgen van de bewoners is groter dan het totaal aantal uren reguliere (echte) werktijd dat met  $Q$  personeelsleden per etmaal beschikbaar is. Omdat het niet mogelijk blijkt meer personeel te vinden, en men 'pyamadagen' wil voorkomen, zal elke verzorger een aantal uur per dag moeten overwerken om al het noodzakelijke werk gedaan te krijgen. De directie van Avondrood vraagt nu aan elke verzorger hoeveel uur hij/zij *maximaal* bereid is per dag over te werken voor de goede zaak. Voor verzorger  $k$  blijkt dit  $u_k$  uur te zijn ( $k = 1, \dots, Q$ ). De volgende vraag is of en hoe een werkschema kan worden opgesteld waarin voor elke verzorger precies wordt voorgeschreven voor wie hij/zij welke taak moet uitvoeren. Men streeft er hierbij naar de totale tijd besteed aan overwerk te minimaliseren. Er zij nog opgemerkt dat in huize Avondrood de goede gewoonte bestaat dat na het voltooien van een taak de verzorger *altijd* nog enige tijd sociaal contact onderhoudt met de bewoner. Deze tijd ligt altijd buiten het tijdvenster van de voltooide taak, maar wordt in onze zakelijk ingestelde samenleving wel als werktijd beschouwd, en mag ook niet plaatsvinden binnen het tijdvenster voor een andere taak. Precies gezegd, sociaal contact na uitvoering taak  $i$  vindt plaats in het tijdsinterval  $[b_i, a_{i+1}]$  ( $a_{M+1} = a_1$  van de volgende dag!). De tijd voor sociaal contact na taak  $i$  tussen verzorger  $k$  en bewoner  $j$  bedraagt altijd  $c_{ijk}$  (hier wordt de persoonlijke relatie tussen bewoner en verzorger zichtbaar!). Merk op dat als een verzorger bijvoorbeeld 3 bewoners geholpen heeft bij taak  $i$  hem/haar dit drie *na elkaar* af te werken sociale contacten 'kost'. Tenslotte, (koffie)pauzes e.d. worden *niet* als werktijd beschouwd.

- (a) Formuleer het probleem van het vinden van een werkschema met minimale totale overwerktijd nu als een gemengd lineair/geheeltallig programmeringsprobleem. *Aanwijzing:* Gebruik in ieder geval de variabelen

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{als taak } i \text{ voor bewoner } j \text{ wordt uitgevoerd door verzorger } k, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

$y_k$  = totale overwerktijd van verzorger  $k$  per etmaal.

Nadat men het optimale werkschema heeft berekend blijkt het personeel zeer ontevreden te zijn, terwijl toch aan de genoemde wensen voldaan is.

- (b) Verklaar waarom het personeel zeer ongelukkig zou kunnen zijn met het 'optimale' werkschema.

De vraag is vervolgens hoe we via extra bijvoorwaarden het personeel wel een acceptabel werkschema kunnen geven. De directie deelt daartoe een etmaal op in drie keer 8 uur (1=dag-dienst, 2=avond-dienst en 3=nacht-dienst). Verder zoekt de directie uit welke taken in de diverse diensten kunnen worden uitgevoerd. Laat  $T_d \subset \{1, 2, \dots, M\}$  de collectie taken zijn die (inclusief sociaal contact na afloop) in een  $d$ -dienst (plus 'aansluitend' overwerk!) redelijkerwijs zijn uit te voeren ( $d = 1, 2, 3$ ).

- (c) Voeg nu de bijvoorwaarden toe die tegemoet komen aan de bezwaren van de oplossing van onderdeel (a). *Aanwijzing:* Gebruik de variabelen,

$$w_{dk} = \begin{cases} 1 & \text{als verzorger } k \text{ voor een } d\text{-dienst wordt ingeroosterd,} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$



4. Een gerichte graaf bestaat uit  $N$  knopen, met  $s = 1, 2, \dots, N = t$ . Met elke kant  $(i, j)$  zijn niet-negatieve kosten  $c_{ij}$  verbonden. We zijn geïnteresseerd in een goedkoopste pad van knoop  $s$  naar knoop  $t$ .
- Beschrijf dit probleem als een mathematisch programmeringsprobleem.
  - Beschrijf in detail de algoritme waarmee dit probleem efficiënt kan worden opgelost. Hoe heet deze algoritme?
  - Laat vervolgens een graaf gegeven zijn met 10 knopen en kosten op de kanten zoals aangegeven in de onderstaande tabel.

| $i \setminus j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
|-----------------|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 1               | - | 5 | 2 | 8 | 9 | - | - | -  | -  | -  |
| 2               | 3 | - | 4 | 2 | 3 | 7 | - | 10 | -  | -  |
| 3               | - | 1 | - | 6 | 1 | 3 | 6 | -  | 12 | -  |
| 4               | - | 2 | 5 | - | 2 | 6 | 3 | 2  | -  | -  |
| 5               | - | - | 2 | 1 | - | 5 | 4 | 7  | -  | 16 |
| 6               | - | 2 | - | - | 3 | - | 5 | 6  | 1  | -  |
| 7               | - | - | - | - | 4 | 2 | - | 4  | 8  | 10 |
| 8               | - | - | - | - | 2 | - | 5 | -  | 2  | 8  |
| 9               | - | - | - | - | 1 | 2 | - | 2  | -  | 5  |

Pas de in onderdeel (b) bedoelde algoritme toe op deze graaf om het goedkoopste pad van 1 naar 10 te vinden. Geef in elke iteratie duidelijk de labels weer.

5. Het bedrijf Multi-Item produceert  $N$  producten en wil een optimaal voorraad/productie schema vaststellen, dat de totale kosten per dag minimaliseert. De vraag naar product  $j$  is constant en gelijk aan  $\beta_j$  per dag ( $j = 1, \dots, N$ ). Om aan alle vraag te kunnen voldoen wordt telkens aan het begin van een dag besloten voor welke producten een productierun gestart wordt. Het is mogelijk voor meerdere producten op dezelfde dag een productierun te starten. Een productierun voor product  $j$  brengt opstartkosten  $K_j$  met zich mee. In een productierun voor product  $j$  worden  $\alpha_j$  eenheden per dag geproduceerd ( $\alpha_j > \beta_j$ ). Alles wat in een dag geproduceerd wordt kan nog dezelfde dag gebruikt worden om te voldoen aan de vraag van die dag. Eventuele overschotten worden tegen betaling van opslagkosten in voorraad gehouden. Voor het in voorraad houden moet ook opslagruimte gehuurd worden. Dit kost  $\gamma$  euro per  $m^3$  per dag, terwijl één product  $j$  een opslagruimte van  $a_j$   $m^3$  vereist. De overige opslagkosten (gederfde rente, etc.) voor product  $j$  bedragen  $h_j$  per product per dag. Er mag geen enkele vraag verloren gaan en de variabele productiekosten worden constant verondersteld. Het probleem is voor elk product de grootte van een productierun te berekenen waarvoor de totale kosten (opstartkosten plus huurkosten plus opslagkosten) per dag minimaal zijn.
- Beargumenteer waarom het nooit optimaal kan zijn een productierun voor een bepaald product te starten op een dag dat voor dat product nog voorraad aanwezig is. Laat  $y_j$  de grootte van een productierun zijn voor product  $j$ . Wat is de grootste voorraad van producten  $j$  die ooit opgeslagen zal zijn? Beschrijf nu de totale kosten per dag als functie van de groottes van de productieruns  $y_1$  t/m  $y_N$ .
  - Bereken voor product  $j$  de optimale productierun  $y_j^*$ .

We gaan er nu vanuit dat opslagruimte niet meer gehuurd moet worden maar in beperkte omvang gratis beschikbaar is. Laat  $A$   $m^3$  gratis beschikbaar zijn. In eerste instantie wil Multi-Item optimaal produceren zonder gebruik te maken van extra opslagruimte, maar de oplossing van onderdeel (b) (met  $\gamma = 0$ ) blijkt meer opslagruimte te vereisen dan  $A$   $m^3$ .



- (c) Formuleer dit probleem als mathematisch programmeringsprobleem met de juiste bijvoorwaarde.

Zoals een ieder weet moet dit probleem via de Lagrange-methode worden opgelost.

- (d) Beschrijf in het kort deze methode in algemene termen.
- (e) Geef nu in detail de vergelijking waaruit numeriek de Lagrange-multiplier berekend moet worden. Laat de oplossing  $\lambda^*$  zijn. Geef nu de optimale groottes van de productieruns  $y_j^*$  als functie van  $\lambda^*$ .
- (f) Stel dat Multi-Item de mogelijkheid krijgt aangeboden extra opslagruimte te huren. Welk huurbedrag zal Multi-Item maximaal per  $m^3$  per dag bereid moeten zijn te betalen?

### Puntenwaardering

| opgave | a. | b. | c. | d. | e. | f. |
|--------|----|----|----|----|----|----|
| 1.     | 5  | 10 | 10 | 10 | -  | -  |
| 2.     | 10 | 10 | 5  | -  | -  | -  |
| 3.     | 15 | 5  | 5  | -  | -  | -  |
| 4.     | 5  | 10 | 10 | -  | -  | -  |
| 5.     | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  |

Het eindcijfer over de opgaven 1 t/m 5 wordt als volgt bepaald,

$$\text{eindcijfer} = \max \left( 1, \min \left( 10, \text{round} \left( \frac{\text{puntentotaal}}{12} \right) \right) \right).$$

Merk op dat voor een 10 slechts 114 punten vereist zijn (van de 140)! Een weggevertje!!