

1. Gegeven is het onderstaande LP-probleem (P) met onbekende parameters

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

We willen dit probleem bestuderen met de Simplex methode.

- (a) Introduceer de noodzakelijke slack, surplus en artificiële variabelen en geef het start *SIMPLEX* tableau voor fase 1 (uitgedrukt in de onbekende parameters). Wat moet men na fase 1 doen ter voorbereiding van fase 2?

Het eind-tableau van fase 2 staat hieronder gegeven.

| var   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\bar{x}_6$ | $\bar{x}_7$ | RHS |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|-----|
| $z$   | 0     | 0     | 0     | 2     | 3/2   | -3/2        | 5           | ?   |
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | -1/5  | 1/10  | -1/10       | 3/5         | 7   |
| $x_1$ | 1     | 0     | 0     | 2     | -1/2  | 1/2         | 1           | 4   |
| $x_3$ | 0     | 0     | 1     | 1/4   | 3/4   | -3/4        | -1/2        | 9   |

- (b) Geef een stelsel van drie vergelijkingen waaruit we de onbekende parameters  $b_1, b_2$  en  $b_3$  kunnen berekenen. De oplossing van dit stelsel is  $b_1 = 7/4, b_2 = -141/8$  en  $b_3 = 149/16$  [hoef je niet te controleren, maar mag natuurlijk wel]. Bereken nu de optimale criteriumwaarde  $z^*$ .
- (c) Formuleer het duale probleem (D) van (P) en geef de volledige oplossingen van zowel (P) als (D).
- (d) Wijzig de rechterkantcoëfficiënt van de eerste bijvoorwaarde van  $7/4$  in  $7/4 + \theta$  en bereken de nieuwe volledige oplossingen van zowel (P) als (D) als functie van  $\theta$  behorende bij het huidige eindtableau. Bereken vervolgens het toegelaten interval voor de rechterkantcoëfficiënt van de eerste bijvoorwaarde.
- (e) Geef een stelsel van drie vergelijkingen waaruit we de onbekende parameters  $a_{11}, a_{21}$  en  $a_{31}$  kunnen berekenen. De oplossing is  $a_{11} = 5/12, a_{21} = 1/24$  en  $a_{31} = 7/48$  [controle, zie boven]. Bereken nu de opbrengstcoëfficiënt  $c_1$ .
- (f) Wijzig de opbrengstcoëfficiënt van  $x_1$  van  $3/2$  in  $3/2 + \eta$  en bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van  $\eta$  behorende bij het huidige eindtableau. Bereken vervolgens het toegelaten interval voor de opbrengstcoëfficiënt van  $x_1$ .
- (g) We wijzigen nu (uitgaande van (P)) de rechterkantcoëfficiënten van de eerste en derde bijvoorwaarde van  $7/4$  en  $149/16$  in resp.  $7/4 + 2\theta$  en  $149/16 - 3\theta$ . Bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van  $\theta$  en bereken voor welke waarden van  $\theta$  de optimale oplossing niet wezenlijk verandert.
- (h) We wijzigen nu (uitgaande van (P)) de opbrengstcoëfficiënten van  $x_1$  en  $x_3$  van  $3/2$  en  $2$  in resp.  $3/2 + 2\eta$  en  $2 - 3\eta$ . Bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van  $\eta$  en bereken voor welke waarden van  $\eta$  de optimale oplossing niet wezenlijk verandert.

2. De bekende Schagense restaurateur Linke Loetje heeft in zijn zaak plaats voor maximaal 240 gasten die aan ronde tafels met maximaal 6 zitplaatsen of aan vierkante tafels met maximaal 4 zitplaatsen kunnen zitten. Het is mogelijk grotere gezelschappen te ontvangen die aan bij elkaar geschoven vierkante tafels gezet worden. Bij het naast elkaar zetten van vierkante tafels gaan wel telkens twee zitplaatsen verloren (2 tafels, maximaal 6 personen; 3 tafels, maximaal 8 personen; etc.). Er staan in het restaurant 20 ronde en 30 vierkante tafels met in totaal 240 stoelen. Voor de vermaarde laatste avond van de jaarlijkse kermis, wanneer heel Schagen op zijn kop staat, heeft de jeugdige keukenhulp Boontje, zonder al teveel te letten op de beschikbare ruimte, de volgende telefonische reserveringen genoteerd: 23 echtparen met één kind, 15 met twee, 13 met drie, 10 met vier en 8 met vijf kinderen. Bovendien heeft Linke Loetje zich al verplicht een zevental hem bekende Westfriese families te ontvangen voor hun jaarlijkse reünie. Deze 'drie-generatie-gezinnen' bestaan elk uit twee opa's, twee oma's de beide ouders en zes kinderen. Een eenvoudige berekening ( $23 \times 3 + 15 \times 4 + 13 \times 5 + 10 \times 6 + 8 \times 7 + 7 \times 12 = 394$ ) leert dat niet alle gezinnen tegelijkertijd de maaltijd kunnen gebruiken. Omdat Boontje de reserveringen geaccepteerd heeft, wil Loetje zijn klanten zo min mogelijk teleurstellen en hij besluit de avond te splitsen in twee sessies, een vroege sessie van 18.00-20.30 uur en een late sessie van 21.00-23.30 uur. Alle gezinnen willen met elkaar zonder andere gezinnen aan één tafel zitten (eventueel samengesteld uit aan elkaar geschoven vierkante tafels), maar de zeer zakelijk ingestelde Westfriese families zijn bereid in twee groepen van zes aan twee ronde tafels te eten, uiteraard wel in dezelfde sessie, mits ze 10% korting krijgen. Elk gezin is in principe bereid te eten in de sessie die het krijgt toegewezen. Gezinnen die desondanks geen plaats blijken te kunnen krijgen wordt door Loetje een maaltijd naar keuze aangeboden voor de helft van de prijs, die door ieder hierdoor getroffen gezinslid genuttigd kan worden in de ruime keuken achter het restaurant op een van de overgebleven stoelen met het bord op schoot. Op grond van zijn culinaire faam mag Loetje ervan uitgaan dat dit aanbod ondanks de niet te ontkennen inconvenianties door elk gezin zal worden geaccepteerd.

Een jarenlange ervaring in de horeca heeft Linke Loetje geleerd dat volwassenen laat op de avond gemiddeld 20 gulden meer besteden dan vroeg op de avond. Dit geldt echter niet voor ouderen (hier de grootouders) die vroeg op de avond zich niet onderscheiden van andere volwassenen, maar laat op de avond evenveel consumeren als de kinderen, omdat ze bang zijn dat zwaar tafelen hun nachtrust verstoort. Voor de kinderen is het eetpatroon over de avond constant. Een volwassene besteedt gemiddeld 50 gulden (vroeg op de avond) en een kind 30 gulden aan het eten. De vraag waar Loetje voor staat is zijn gasten zo over de tafels en de avond te verdelen, dat zijn totale opbrengst maximaal is. Omdat dit probleem zijn intellectuele vermogens te boven gaat, vraagt hij Boontje, die tenslotte verantwoordelijk is voor de ontstane situatie, dit probleem voor hem op te lossen. Boontje, in zijn vrije tijd student econometrie, realiseert zich dat dit probleem als een (geheeltallig) lineair programmeringsprobleem geformuleerd moet worden, maar hij komt er niet helemaal uit. Reik je medestudent de helpende hand! [30 punten].

*Aanwijzing.* Om je een beetje op weg te helpen, voer in ieder geval de volgende variabelen in ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ;  $j = 1, 2$ ;  $k = 4, 6, 8, 12$ ):

$x_{ijk}$  = aantal gezinnen met  $i$  kinderen dat in sessie  $j$  aan vierkante tafels zit met  $k$  zitplaatsen,

$y_{ij}$  = aantal gezinnen met  $i$  kinderen dat in sessie  $j$  aan een ronde tafel plaats neemt

$u_{ij}$  = aantal gezinnen met  $i$  kinderen dat in sessie  $j$  geen tafel toegewezen krijgt,

$w_j$  = het totale aantal niet in het restaurant gebruikte stoelen in sessie  $j$ .

#### Puntenwaardering

| opgave | a. | b. | c. | d. | e. | f. | g. | h. |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1.     | 10 | 10 | 5  | 10 | 5  | 10 | 10 | 10 |
| 2.     | 30 |    |    |    |    |    |    |    |