

1. (a) Het duale probleem (D) is

$$\max z = 5x_1 + 4x_2 + 8x_3$$

$$3x_1 + 7x_2 - 2x_3 \geq 42$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 56$$

$$4x_1 - 5x_2 + 2x_3 \leq 70.$$

Invoering van surplus, artificiële en slack variabelen leidt tot het onderstaande stelsel vergelijkingen:

$$3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 + \bar{x}_5 = 42$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \bar{x}_6 = 56$$

$$4x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_7 = 70$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Hier zijn $\bar{x}_5$ en $\bar{x}_6$ artificiële variabelen, x_4 een surplus variabele en x_7 een slackvariabele. In fase 1 minimaliseren we de som van de artificiële variabelen

$$w = \bar{x}_5 + \bar{x}_6.$$

We krijgen de volgende drie simplex-tableaux.

var	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$	x_7	RHS
$-w$	-7	-9	-1	1	0	0	0	-98
$\bar{x}_5$	3	7	-2	-1	1	0	0	42
$\bar{x}_6$	4	2	3	0	0	1	0	56
x_7	4	-5	2	0	0	0	1	70
$-w$	-22/7	0	-25/7	-2/7	9/7	0	0	-44
x_2	3/7	1	-2/7	-1/7	1/7	0	0	6
$\bar{x}_6$	22/7	0	25/7	2/7	-2/7	1	0	44
x_7	43/7	0	4/7	-5/7	5/7	0	1	100
$-w$	0	0	0	0	1	1	0	0
x_2	17/25	1	0	-3/25	3/25	2/25	0	238/25
x_3	22/25	0	1	2/25	-2/25	7/25	0	308/25
x_7	141/25	0	0	-19/25	19/25	-4/25	1	2324/25
z	119/25	0	0	4/25	-4/25	64/25	0	3416/25

Na fase 1 moeten we de criteriumfunctie z herschrijven in louter niet-basis variabelen:

$$\begin{aligned} z &= 5x_1 + 4(238/25 - 17/25x_1 + 3/25x_4 - 3/25\bar{x}_5 - 2/25\bar{x}_6) \\ &\quad + 8(308/25 - 22/25x_1 - 2/25x_4 + 2/25\bar{x}_5 - 7/25\bar{x}_6) = \\ &= 3416/25 - 119/25x_1 - 4/25x_4 + 4/25\bar{x}_5 - 64/25\bar{x}_6. \end{aligned}$$

Deze z -vergelijking leidt tot de hierboven reeds gegeven z -rij.

- (b) Aan de in onderdeel (a) gegeven z -rij zien we dat de in de laatste iteratie van fase 1 gevonden toegelaten basisoplossing van (D) ook de optimale oplossing van (D) is, omdat aan het optimaliteitscriterium voldaan is (de cf'n van x_1, x_2, x_3, x_4 en x_7 in de z -rij zijn alle niet-negatief; de ccf'n van de artificiële variabelen tellen niet mee!) We kunnen nu de optimale oplossingen van (D) en (P) aflezen. De volledige oplossing van (D) is

$$z^* = 3416/25, x_1^* = 0, x_2^* = 238/25, x_3^* = 308/25.$$

De volledige oplossing van (D) is

$$w^* = 3416/25, u_1^* = -4/25, u_2^* = 64/25, u_3^* = 0.$$

- (c) De kostencf. van u_1 in (P) is de RHS-cf. van de eerste bijvoorwaarde in (D)! De oplossing van (D(η)) is

$$z(\eta) = 3416/25 - 4/25\eta, x_1(\eta) = 0, x_2(\eta) = 238/25 + 3/25\eta, x_3(\eta) = 308/25 - 2/25\eta.$$

Voor de gevoeligheidsanalyse hebben we ook nodig $x_7(\eta) = 2324/25 + 19/25\eta$.

De oplossing van (P(η)) is

$$w(\eta) = 316/25 - 4/25\eta, u_1(\eta) = -4/25, u_2(\eta) = 64/25, u_3(\eta) = 0.$$

De eis van toegelatenheid zegt nu

$$x_2(\eta) \geq 0 \text{ en } x_3(\eta) \geq 0 \text{ en } x_7(\eta) \geq 0.$$

Dit geeft: $-238/3 \leq \eta \leq 154$, dus is het gevraagde toegelaten interval is $[-37\frac{1}{3}, 196]$.

- (d) De RHS-cf. van de tweede bijvoorwaarde in (P) is de opbrengstcf. van x_2 in (D)! Volgens het FI wordt de cf. van x_2 in de z -rij nu $-\theta$. Omdat x_2 in de basis zit moet dit getal weer 0 worden. Tel daartoe de x_2 -rij θ keer bij de z -rij op. Dit geeft de correcte $z(\theta)$ -rij:

$$[119/25 + 17/25\theta, 0, 0, 4/25 - 3/25\theta, -4/25 + 3/25\theta, 64/25 + 2/25\theta, 0, 3416/25 + 238/25\theta]$$

De oplossing van (D(θ)) is

$$z(\theta) = 3416/25 + 238/25\theta, x_1(\theta) = 0, x_2(\theta) = 238/25, x_3(\theta) = 308/25.$$

De oplossing van (P(θ)) is

$$w(\theta) = 3416/25 + 238/25\theta, u_1(\theta) = -4/25 + 3/25\theta, u_2(\theta) = 64/25 + 2/25\theta, u_3(\theta) = 0.$$

Het optimaliteitscriterium vereist nu

$$119/25 + 17/25\theta \geq 0 \text{ en } 4/25 - 3/25\theta \geq 0.$$

Dit geeft $-7 \leq \theta \leq 4/3$, dus het gevraagde toegelaten interval is $[-3, 5\frac{1}{3}]$.

- (e) Dezelfde aanpak als bij onderdeel (c), maar nu simultane wijzigingen. De oplossing van (D(η)) is

$$z(\eta) = 3416/25 - 4/25(2\eta) + 64/25(-3\eta) = 3416/25 - 8\eta,$$

$$x_1(\eta) = 0$$

$$x_2(\eta) = 238/25 + 3/25(2\eta) + 2/25(-3\eta) = 238/25 \text{ [toevallig constant!!]},$$

$$x_3(\eta) = 308/25 - 2/25(2\eta) + 7/25(-3\eta) = 308/25 - \eta.$$

Voor de gevoeligheidsanalyse hebben we ook nodig

$$x_7(\eta) = 2324/25 + 19/25(2\eta) - 4/25(-3\eta) = 2324/25 + 2\eta.$$

De oplossing van $(P(\eta))$ is

$$w(\eta) = 3416/25 - 8\eta,$$

$$u_1(\eta) = -4/25, u_2(\eta) = 64/25, u_3(\eta) = 0.$$

Evenals in onderdeel (c) zegt de eis van toegelatenheid weer

$$x_2(\eta) \geq 0, \text{ en } x_3(\eta) \geq 0 \text{ en } x_7(\eta) \geq 0.$$

Alles uitwerken geeft dat de optimale oplossingen niet wezenlijk veranderen voor

$$-46\frac{12}{25} \leq \eta \leq 12\frac{8}{25}.$$

- (f) Dezelfde aanpak als bij onderdeel (d), maar ook nu simultane wijzigingen. Het FI geeft als nieuwe z -rij:

$$[119/25 - 2\theta, 3\theta, 0, 4/25, -4/25, 64/25, 0, 3416/25]$$

Omdat x_2 in de basis zit moet de cf. van x_2 weer 0 worden [de cf. van x_1 hoeft niet 0 te zijn, want x_1 zit niet in de basis!]. We bereiken dit door de x_2 -rij 3θ keer af te trekken van bovenstaande z -rij. De nieuwe $z(\theta)$ -rij die aan alle simplex-eisen voldoet wordt nu

$$[119/25 - 101/25\theta, 0, 0, 4/25 + 9/25\theta, -4/25 - 9/25\theta, 64/25 - 6/25\theta, 0, 3416/25 - 714/25\theta]$$

De oplossing van $(D(\theta))$ is

$$z(\theta) = 3416/25 - 714/25\theta, x_1(\theta) = 0, x_2(\theta) = 238/25, x_3(\theta) = 308/25.$$

De oplossing van $(P(\theta))$ is

$$w(\theta) = 3416/25 - 714/25\theta, u_1(\theta) = -4/25 - 9/25\theta, u_2(\theta) = 64/25 - 6/25\theta, u_3(\theta) = 0.$$

Het optimaliteitscriterium vereist nu

$$119/25 - 101/25\theta \geq 0 \text{ en } 4/25 + 9/25\theta \geq 0.$$

Dit geeft dat de oplossingen niet wezenlijk veranderen voor $-\frac{4}{9} \leq \theta \leq 1\frac{18}{101}$.

2. (a) Voor het gemak definiëren we de hulpvariabelen

y_j = speelsterkte van het koppel waarin econometrist j participeert ($j = 1, 2, \dots, 20$).

Dan geldt de volgende vergelijking voor elke j

$$y_j = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{c_i + c_j}{2} x_{ij} + \sum_{k=j+1}^{20} \frac{c_j + c_k}{2} x_{jk}. \quad (*)$$

De bijvoorwaarden

$$\sum_{i=1}^{j-1} x_{ij} + \sum_{k=j+1}^{20} x_{jk} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, 20 \quad (**)$$

formuleren de eis dat elke student in precies één koppel optreedt. Het probleem kan nu in eerste instantie geformuleerd worden als

$$\max z = \min\{y_j \mid j = 1, 2, \dots, 20\} \quad \text{onder } (*) \text{ en } (**).$$

Dit moeten we nu nog herschrijven om er een (geheeltallige) LP-formulering van te maken. Eindresultaat:

$$\begin{aligned} \max z = y \quad & [y \text{ is een nieuw ingevoerde variabele!}] \\ \sum_{i=1}^{j-1} \frac{c_i + c_j}{2} x_{ij} + \sum_{k=j+1}^{20} \frac{c_j + c_k}{2} x_{jk} & \geq y, \quad j = 1, 2, \dots, 20, \\ \sum_{i=1}^{j-1} x_{ij} + \sum_{k=j+1}^{20} x_{jk} & = 1, \quad j = 1, 2, \dots, 20, \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad & (\text{voor alle } i \text{ en } j), \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- (b) We gebruiken dezelfde beslissingsvariabelen als bij onderdeel (a), maar nu voor de wiskundestudenten. Voor het gemak definiëren we weer de hulpvariabelen

y_j = speelsterkte van het koppel waarin wiskundestudent j participeert ($j = 1, 2, \dots, 20$).

Dan geldt de volgende vergelijking voor elke j

$$y_j = \sum_{i=1}^{j-1} w_j x_{ij} + \sum_{k=j+1}^{20} w_k x_{jk}.$$

Merk op dat $\sum_{j=1}^{20} y_j$ nu gelijk is aan twee keer de som van alle speelsterktes van de koppels. De (geheeltallige) LP-formulering wordt nu

$$\begin{aligned} \max z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{20} y_j, \quad & [\text{factor } \frac{1}{2} \text{ mag men ook weglaten}] \\ y_j = \sum_{i=1}^{j-1} w_j x_{ij} + \sum_{k=j+1}^{20} w_k x_{jk} \quad & j = 1, 2, \dots, 20, \\ \sum_{i=1}^{j-1} x_{ij} + \sum_{k=j+1}^{20} x_{jk} = 1, \quad & j = 1, 2, \dots, 20, \\ (w_j - w_i)x_{ij} \leq 2, \quad & i = 1, 2, \dots, 19; \quad j = i + 1, \dots, 20, \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad y_j \geq 0 \quad & \text{voor alle } i \text{ en } j. \end{aligned}$$

De laatste constraints formuleren dat de leden van een koppel niet meer dan 2 punten in speelsterkte mogen verschillen.

- (c) Dit is een generalisatie van een toewijzingsprobleem (bv. huwelijksprobleem).

$$\begin{aligned} \min z = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} |c_i - w_j| x_{ij} \\ \sum_{i=1}^{10} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, 10, \quad (1) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{10} y_{ijk} = x_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 10, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} y_{ijk} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, 10, \quad (4)$$

$$2M_k y_{ijk} \leq (c_i + w_j) x_{ij}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, 10. \quad (5)$$

We geven enige toelichting:

- de constraints (1) verwoorden dat elk wiskunde-koppel met precies één econometrie-koppel gepaard wordt,
- de constraints (2) verwoorden dat elk econometrie-koppel met precies één wiskunde-koppel gepaard wordt,
- de constraints (3) verwoorden dat elk tweetal gepaarde koppels precies één precies één collectie opgaven krijgt toegewezen,
- de constraints (4) verwoorden dat elke opgavencollectie aan precies één tweetal gepaarde koppels wordt toegewezen,
- de constraints (5) tenslotte beschrijven de eis dat de moeilijkheidsgraad van een opgavencollectie niet groter mag zijn dan de gemiddelde speelsterkte van de twee met elkaar gepaarde koppels aan wie de collectie is toegewezen.

3. Definieer de volgende beslissingsvariabelen voor $i, j = 1, 2, 3$

x_{ij} = aantal agenten dat van bureau i naar plaats j wordt gestuurd,

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als minstens één agent van bureau } i \text{ naar plaats } j \text{ gestuurd wordt,} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

[We gebruiken voor bureau i , 1=Marnixstraat, 2=NieuweZijds, 3=Warmoesstraat en voor plaats j , 1=Prinsengracht, 2=Keizersgracht, 3=Spui.] De probleemformulering luidt nu als volgt

$$\min z = 2y_{11} + 3y_{12} + 4y_{13} + 3y_{21} + 4y_{22} + 2y_{23} + 5y_{31} + 3y_{32} + 3y_{33}$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 7,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 12,$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 10,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 5,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 8,$$

$$x_{ij} \leq 12y_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Merk op dat de laatste constraints afdwingen dat $y_{ij} = 1$ als $x_{ij} > 0$ en dat is precies wat we willen. De constante 12 is een veilige bovengrens voor de waarden van de x_{ij} . Deze bovengrens kan hier natuurlijk lager gekozen worden, maar de computer zou dit niet kunnen, vandaar onze keuze voor 12.