

1. Gegeven is het onderstaande LP-probleem (P)

$$\min w = 42u_1 + 56u_2 + 70u_3$$

$$3u_1 + 4u_2 + 4u_3 \geq 5$$

$$7u_1 + 2u_2 - 5u_3 \geq 4$$

$$-2u_1 + 3u_2 + 2u_3 \geq 8$$

$$u_1 \leq 0, u_2 \in \mathbb{R}, u_3 \geq 0.$$

We lossen (P) op door de Simplex methode toe te passen op het *duale* probleem (D).

- (a) Formuleer het duale probleem (D) [gebruik voor de duale beslissingsvariabelen de variabelen x_1, x_2 en x_3 en noem de criteriumfunctie van (D) zoals gebruikelijk z]. Introduceer *vervolgens* voor (D) de noodzakelijke surplus (x_4), artificiële ($\bar{x}_5$ en $\bar{x}_6$) en slack (x_7) variabelen. Voer daarna fase 1 uit (twee iteraties!). Wat moet men na fase 1 doen ter voorbereiding van fase 2? Doe het!

Het start-tableau van fase 2 voor probleem (D) staat hieronder (onvolledig!) gegeven.

var	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$	x_7	RHS
z	?	?	?	?	$-4/25$	$64/25$	?	?
x_2	$17/25$	?	?	$-3/25$	?	$2/25$	?	$238/25$
x_3	$22/25$	?	?	$2/25$	?	$7/25$	?	$308/25$
x_7	$141/25$	?	?	$-19/25$	?	$-4/25$	?	$2324/25$

- (b) Vul de ontbrekende getallen in, completeer fase 2 en geef de *volledige* [d.w.z. zowel de waarden van de beslissingsvariabelen als de waarde van de criteriumfunctie] optimale oplossingen van zowel (P) als (D).
- (c) Wijzig in (P) de kostencoëfficiënt van u_1 van 42 in $42 + \eta$ en bereken de nieuwe volledige oplossingen van zowel (P) als (D) als functie van η behorende bij het huidige eindtableau van (D). Bereken vervolgens het toegelaten interval voor de kostencoëfficiënt van u_1 .
- (d) Wijzig de rechterkantcoëfficiënt van de tweede bijvoorwaarde van (P) van 4 in $4 + \theta$ en bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van θ behorende bij het huidige eindtableau van (D). Bereken vervolgens het toegelaten interval voor de rechterkantcoëfficiënt van de tweede bijvoorwaarde van (P).
- (e) We wijzigen nu (uitgaande van (P)) de kostencoëfficiënten van u_1 en u_2 van 42 en 56 in resp. $42 + 2\eta$ en $56 - 3\eta$. Bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van η en bereken voor welke waarden van η de optimale oplossingen *niet wezenlijk* veranderen.
- (f) We wijzigen nu (uitgaande van (P)) de rechterkantcoëfficiënten van de eerste en tweede bijvoorwaarde van 5 en 4 in resp. $5 + 2\theta$ en $4 - 3\theta$. Bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van θ en bereken voor welke waarden van θ de optimale oplossingen *niet wezenlijk* veranderen.

2. Een cohort van 20 econometriestudenten treedt in het strijdperk tegen een cohort van 20 wiskundestudenten voor een wedstrijd 'oplossen OR-vraagstukken'. Beide cohorten worden in koppels van twee verdeeld, en er vindt eenmalig een paring plaats tussen de koppels van de twee groepen studenten. De gepaarde koppels spelen tegen elkaar in die zin dat zij eenzelfde collectie vraagstukken krijgen voorgeschoteld (verschillende paren koppels verschillende collecties). Er zijn 10 collecties vraagstukken, elk met een eigen moeilijkheidsgraad die is uit te drukken in een rationaal getal tussen 0 (triviaal) en 10 (nog nooit volledig opgelost). Collectie k heeft moeilijkheidsgraad M_k ($k = 1, 2, \dots, 10$). De docenten, voor de econometristen Dr. Reinders en voor de wiskundigen Dr. Adriaanse, treden als 'coach' op en beschikken over de 'speelsterkte' van alle studenten afzonderlijk. Deze individuele sterkte wordt ook uitgedrukt in een rationaal getal tussen 0 (tot niets in staat) en 10 (een genie). De sterkte van econometriestudent j is c_j , en de sterkte van wiskundestudent j is w_j ($j = 1, 2, \dots, 20$). Van de wiskundestudenten is bovendien gegeven dat de studenten naar speelsterkte gerangschikt zijn: $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_{20}$. De sterkte van een koppel econometristen is het gemiddelde van de speelsterktes van de twee leden van het koppel, terwijl de sterkte van een koppel wiskundigen gelijk is aan de speelsterkte van de sterkste student van het koppel. Elke docent heeft nu als eerste taak de 10 koppels van zijn studenten samen te stellen. Dr. Reinders streeft er hierbij naar het zwakste koppel econometristen zo sterk mogelijk te maken. Dr. Adriaanse besluit de totale som van de speelsterktes van zijn koppels te maximaliseren onder de voorwaarde dat het verschil in individuele speelsterkte binnen een koppel hoogstens 2 bedraagt.

- (a) Formuleer het probleem van Dr. Reinders als een geheeltallig programmeringsprobleem.
Aanwijzing: Gebruik de binaire beslissingsvariabelen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als student } i \text{ met student } j \text{ gekoppeld wordt,} \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

voor $i < j$ met $i = 1, \dots, 19$ en $j = i + 1, \dots, 20$. Om je een beetje op weg te helpen, in deze formulering komen de volgende bijvoorwaarden voor

$$\sum_{i=1}^{j-1} x_{ij} + \sum_{k=j+1}^{20} x_{jk} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, 20.$$

Beschrijf in woorden wat deze bijvoorwaarden formuleren ('lege' som is 0).

- (b) Idem voor het probleem van Dr. Adriaanse.

Laat nu de samenstelling van de koppels gegeven zijn voor zowel de econometriestudenten als de wiskundestudenten, en daarmee ook de speelsterkte van elk koppel. Omdat de individuele speelsterktes niet meer relevant zijn, *herdefiniëren* we nu de c_j als de speelsterkte van *koppel* j van de econometriestudenten en w_j als de speelsterkte van *koppel* j van de wiskundestudenten (nu dus $j = 1, 2, \dots, 10$). De docenten vragen zich nu af welke koppels gepaard moeten worden om tegen elkaar te spelen en welke collectie opgaven een gepaard koppel moet krijgen. Enerzijds wil men zoveel mogelijk even sterke koppels tegen elkaar uit laten komen, maar er moet natuurlijk ook een redelijke toewijzing plaats vinden van de collecties opgaven. Deze twee aspecten worden nu samengeballd door als optimaliteitscriterium te kiezen de totale som van de absolute verschillen tussen de speelsterktes van de gepaarde koppels [d.w.z. $|c_i - w_j|$ als koppel i van de econometristen gepaard wordt met koppel j van de wiskundigen] onder de eis dat elk tweetal gepaarde koppels (wiskundigen en econometristen) een collectie opgaven krijgt toegewezen waarvan de moeilijkheidsgraad niet groter is dan de gemiddelde sterkte van de twee koppels.

- (c) Formuleer dit gecombineerde parings- en toewijzingsprobleem als een geheeltallig programmeringsprobleem. *Aanwijzing:* Introduceer weer een aantal binaire beslissingsvariabelen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als econometristenkoppel } i \text{ gepaard wordt met wiskundigenkoppel } j, \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

$$y_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{als econometristenkoppel } i \text{ gepaard wordt met wiskundigenkoppel } j \\ & \text{en hen opgavencollectie } k \text{ wordt toegewezen,} \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

voor $i, j, k = 1, 2, \dots, 10$. Om je weer een beetje op weg te helpen krijg je alvast de volgende bijvoorwaarden cadeau (de overige moet je zelf vinden!)

$$2M_k y_{ijk} \leq x_{ij}(c_i + w_j), \quad i, j, k = 1, 2, \dots, 10.$$

Beschrijf wel wat deze bijvoorwaarden ‘verwoorden’.

3. Na uitvoering van het satirische toneelstuk ‘IJup en Yul’ door de toneelgroep Sater in de stadsschouwburg zijn op de Amsterdamse grachtengordel heftige onlusten uitgebroken. De onlusten concentreren zich bij het huis van de cabaretier Youp de Hacker op de Prinsengracht, bij het universiteitsinstituut van de cultuursocioloog Bram Zwetsloot op de Keizersgracht en bij het schrijverscafé De Rode Neus achter het Spui. De aanwezige politiecommandanten op deze drie plekken hebben bij het hoofdbureau om versterking gevraagd: 7 extra manschappen voor de Prinsengracht, 4 extra voor de Keizersgracht en 12 extra voor het Spui. Commissaris Baantjer moet onverwijld beslissen hoe versterkingen te sturen vanuit de bureaus Marnixstraat, Nieuwe Zijds en Warmoesstraat alwaar respectievelijk 10, 5 en 8 manschappen nog ter beschikking staan. De commissaris besluit naar de Prinsengracht 3 manschappen vanuit de Marnixstraat en 4 manschappen vanuit de Warmoesstraat te sturen, naar de Keizersgracht 2 manschappen vanuit de Marnixstraat en 2 manschappen vanuit de Warmoesstraat, en naar het Spui 5 manschappen vanuit de Marnixstraat, 5 vanuit de Nieuwe Zijds en 2 vanuit de Warmoesstraat. De volgende dag wordt de rampzalig uitgevallen beslissing van de hoofdcommissaris op het stadhuis geëvalueerd. De commissaris verdedigt zich door te stellen dat, overeenkomstig de vigerende regels, hij gekozen heeft voor een verdeling waarvoor de som van de tijden om alle manschappen ter plekke te krijgen minimaal is. In onderstaande tabel worden de reistijden in minuten van de verschillende bureaus naar de onheilsplekken gegeven: (voor alle duidelijkheid: de reistijd hangt niet af van het aantal gestuurde man-

	Prinsengracht	Keizersgracht	Spui
Marnixstraat	2	3	4
Nieuwe Zijds	3	4	2
Warmoesstraat	5	3	3

schappen). Stel voor de burgemeester een geheeltallig programmeringsprobleem op waarmee berekend kan worden of de oplossing van commissaris Baantjer optimaal is.

Puntenwaardering

opgave	a.	b.	c.	d.	e.	f.
1.	10	10	10	10	10	10
2.	10	10	10	-	-	-
3.	10	-	-	-	-	-

Voor een voldoende zijn minimaal 55 punten vereist.

$$\text{eindcijfer} := \max \left(1, \text{round} \left(\frac{\text{puntentotaal}}{10} \right) \right).$$