

Tentamen Inleiding Operationele Research, 8 mei 2002, 09.30-12.30 uur.

1. Gegeven is het onderstaande LP-probleem (P)

$$\min z = 45x_1 + 24x_2 + 8x_3$$

$$3x_1 + 7x_2 - 2x_3 \geq 4$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 6$$

$$4x_1 - 5x_2 + 2x_3 \geq 7$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Het programma SIMOPT geeft de onderstaande output voor het DUALE probleem (D).

Last Iteration

	Y1	Y2	Y3	Slack1	Surp.2	Art.2	Art.3	RHS
Rel.Cost	??	??	??	??	??	??	??	??
Y3	??	??	??	0.18	0.12	-0.12	-0.16	??
Y1	??	??	??	0.13	-0.03	0.03	-0.20	??
Y2	??	??	??	-0.03	-0.10	0.10	0.30	??

Value Objective Function : 68.7589

Variable	Activity Level	Reduced Cost
Y1 :	5.1560	0.0000
Y2 :	3.5461	0.0000
Y3 :	3.8369	0.0000

	Slack of Surplus	Shadow prices
Constraint 1	0.0000	1.6099
Constraint 2	0.0000	-0.1348
Constraint 3	0.0000	-0.0567

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowed Interval
Y1	4.0000	[??? , ???]
Y2	6.0000	[-Infinity , 7.3571]
Y3	7.0000	[5.8824 , Infinity]

Right-Hand-Side Ranges

Constraint	Current RHS	Allowed Interval
1.	45.0000	[23.3600 , 170.0000]
2.	24.0000	[??? , ???]
3.	8.0000	[-3.6279 , 32.5909]

- (a) Formuleer het duale probleem (D) van (P) en geef de *volledige* oplossingen van zowel (P) als (D). Vul ook het eindtableau volledig in.
 - (b) Wijzig in (P) de rechterkantcoëfficiënt van de eerste bijvoorwaarde van 4 in $4 + \theta$ en bereken de nieuwe volledige oplossingen van zowel (P) als (D) als functie van θ behorende bij het huidige eindtableau. Bereken ook het toegelaten interval voor de rechterkantcoëfficiënt van de eerste bijvoorwaarde.
 - (c) Wijzig in (P) de kostencoëfficiënt van x_2 van 24 in $24 + \eta$ en bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van η behorende bij het huidige eindtableau. Bereken weer het toegelaten interval voor de kostencoëfficiënt van x_2 .
 - (d) We wijzigen nu (uitgaande van (P)) de kostencoëfficiënten van x_2 en x_3 van 24 en 8 in resp. $24 + 4\theta$ en $8 - 5\theta$. Bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van θ en bereken voor welke waarden van θ de optimale oplossing *niet wezenlijk* verandert.
2. De redactie van het televisieprogramma Binnenhof wil 10 politieke debatten uitzenden waarin telkens twee lijsttrekkers tegen elkaar in het strijdperk treden. Omdat er precies 10 partijen zijn (PvdA, CDA, VVD, D66, GL, CU, SP, SGP, LN en LPF) zal elke lijsttrekker in precies twee debatten kunnen (en moeten!) optreden, en de vraag is hoe deze lijsttrekkers te ‘paren’. Het zal duidelijk zijn dat niet elke combinatie van twee lijsttrekkers even boeiende televisie oplevert, en daarom schakelt men het marketing bureau Inzicht in om te onderzoeken welke partijcombinaties (d.w.z. lijsttrekkersduo’s) voor de kijkers (en daarmee voor de programmamakers!) aantrekkelijk zijn. Volgens de mediadeskundigen van bureau Inzicht kan op grond van opinieonderzoek voor elk lijsttrekkersduo een getal op een schaal van 1 t/m 10 worden bepaald dat het enthousiasme van de kijker voor een debat tussen hen tot uitdrukking brengt (10=spectaculair; 9=zeer boeiend; $\dots$; 1=volslagen oninteressant). Voor enige tienduizenden euro’s voert Inzicht zo’n onderzoek uit, maar dat heeft de redactie er graag voor over, want de kijkcijfers zijn heilig in televisieland. Laat nu a_{ij} de waardering zijn voor een debat tussen de lijsttrekker van partij i en de lijsttrekker van partij j (bv. $a_{SGP,SP} = 3$ en $a_{GL,LPF} = 8$). De redactie van Binnenhof beschikt nu over 45 getallen a_{ij} ($1 \leq i < j \leq 10$) voor alle mogelijke partijcombinaties en wil hiermee 10 paren kiezen met als eis dat elke partij precies twee keer vertegenwoordigd is, en elk paar hoogstens één keer mag voorkomen. Ondanks het wetenschappelijke voorwerk van bureau Inzicht barst binnen de redactie nu een felle discussie los over de vraag wie met wie te koppelen, totdat redactielid Rob Trip opmerkt dat een discussie pas zinvol is als men een bepaald criterium als uitgangspunt neemt. Rob Trip stelt voor die 10 koppels te kiezen waarvoor de totale waardering van de kijkers voor alle debatten tezamen zo groot mogelijk is (waardering voor 10 debatten is de som van de waarderingen voor elk debat afzonderlijk). Na enig heen en weer gepraat kan de redactie zich hierin vinden, maar men realiseert zich wel dat het nog een hele uitzoekerij is die 10 koppels te vinden. Daarom vraagt men opnieuw aan bureau Inzicht de helpende hand te bieden. Voor de mediadeskundigen blijkt dit probleem te moeilijk en daarom gaat bureau Inzicht te rade bij de OR-afdeling van de VU, die er wel een aardige tentamenopgave in ziet.

- (a) Formuleer het probleem als een DP-(dynamisch programmerings)probleem met als optimaliteitscriterium het voorstel van Rob Trip. Beschrijf duidelijk alle elementen van de DP-algoritme (stadia, toestand, beslissing, etc.)

Geconfronteerd met de oplossing volgens het criterium van Rob Trip blijkt het boegbeeld van de VARA, Sonja Barend, erg ontevreden, omdat er een nieuw debat tussen LPF en de PvdA uit de bus is gekomen (volgens bureau Inzicht is $a_{PvdA,LPF} = 10$), waar ze bij de VARA niet op zitten te wachten. Na overleg met Marcel van Dam pleit zij daarom nu voor

een oplossing waarin het (in de ogen van de kijker) minst interessante debat zo boeiend mogelijk zal zijn. Zij hoopt dat zo een nieuw debat tussen Fortuyn en Melkert voorkomen kan worden.

- (b) Formuleer ook dit probleem als een DP-probleem (zelfde eisen als in onderdeel (a)).
- (c) Naar welk van de twee voorgestelde criteria gaat jouw voorkeur naar uit? Geef een korte toelichting.
3. Het autobedrijf Rover wil voor de komende twee kwartalen een optimaal productie/transport schema vaststellen. Rover beschikt over twee fabrieken ($i = 1, 2$) voor de productie en twee distributiecentra ($j = 1, 2$) waar geproduceerde auto's in voorraad kunnen worden gehouden. In elk kwartaal is de productiecapaciteit in fabriek i gelijk aan C_i . Aan het eind van kwartaal k ($k = 1, 2$) moeten bij distributiecentrum j minstens R_{kj} auto's zijn afgeleverd. Rover eist dat de totale productie in de komende twee kwartalen in fabriek 1 minstens 80% is van de totale productie in fabriek 2. Als gevolg van beperkte opslagmogelijkheden in de fabrieken, kunnen aan het eind van kwartaal 1 in fabriek i hoogstens S_i auto's worden opgeslagen. Een auto geproduceerd in fabriek i vereist productiekosten p_i . Het opslaan in fabriek i aan het eind van kwartaal 1 kost een bedrag h_i per auto, terwijl dit in distributiecentrum j een bedrag q_j per auto kost. Vershippen van een auto van fabriek i naar distributiecentrum j vereist een bedrag t_{ij} aan transportkosten (duur transport te verwaarlozen t.o.v. lengte van een kwartaal). Formuleer een lineair programmeringsprobleem waarmee het optimale productie/transport schema kan worden bepaald. *Aanwijzing: Gebruik in ieder geval de volgende beslissingsvariabelen,*

x_i = aantal auto's geproduceerd in en verscheept aan het eind van kwartaal 1 in fabriek i ,
 y_i = aantal auto's geproduceerd in en verscheept aan het eind van kwartaal 2 in fabriek i ,
 u_i = aantal auto's geproduceerd in en opgeslagen aan het eind van kwartaal 1 in fabriek i ,
 z_{ij} = aantal auto's verscheept van fabriek i naar distributiecentrum j aan het eind van kwartaal 1,
 v_{ij} = aantal auto's verscheept van fabriek i naar distributiecentrum j aan het eind van kwartaal 2,
 w_j = aantal auto's opgeslagen in distributiecentrum j aan het eind van kwartaal 1.

4. Een gerichte graaf bestaat uit N knopen $1, 2, \dots, N$. Met elke kant (i, j) is een positief gewicht g_{ij} verbonden. Van deze gewichten g_{ij} zijn sommige kleiner dan 1 en andere zijn groter dan 1. We zijn geïnteresseerd in het pad van knoop 1 naar knoop N waarvoor het *product* van de met de kanten verbonden gewichten minimaal is.

- (a) Beschrijf hoe en met welke algoritme dit probleem kan worden opgelost. Is het mogelijk dat het probleem geen oplossing heeft?
- (b) Beschrijf in *detail* de in onderdeel a. bedoelde algoritme in algemene termen.
- (c) Los bovenstaand probleem op (met de in onderdeel b. beschreven algoritme!) voor de gerichte graaf bestaande uit zes knopen $1, 2, 3, 4, 5, 6$, en de onderstaande gewichten g_{ij} op de kanten (i, j) . Een streepje bij (i, j) betekent dat er geen kant bestaat tussen knoop i en knoop j .

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	-	8	16	-	-	-
2	-	-	-	1/2	2	-
3	-	1/4	-	-	1/16	-
4	-	-	4	-	2	8
5	-	-	-	-	-	1/4

Aanwijzing: Merk op dat de getallen zó gekozen zijn dat de $\dots$ (puntje, puntje, puntje) eenvoudige getallen oplevert.

5. Het bedrijf Multi-Item produceert N verschillende producten. De wekelijkse vraag naar product j is constant en gelijk aan β_j ($j = 1, \dots, N$). Om aan de vraag te kunnen voldoen worden de producten in voorraad gehouden. De opslagkosten voor producten j bedragen h_j per product per week. Zodra product j uit voorraad is wordt voor product j een productierun gestart die een bedrag K_j aan opstartkosten met zich meebrengt. De productietijd is verwaarloosbaar klein, zodat na het besluit te produceren onmiddellijk de geproduceerde hoeveelheid op de planken ligt. Er gaat dus geen enkele vraag verloren. Het probleem is natuurlijk uit hoeveel producten j één productierun moet bestaan om te bewerkstelligen dat de totale kosten (opslagkosten plus opstartkosten) per week minimaal zijn (Merk op dat productiekosten hier irrelevant zijn. Waarom?). Laat y_j de grootte zijn van een productierun voor product j .

- (a) Leid een formule af voor de optimale grootte van een productierun voor product j , zeg y_j^* . Hoe heet deze formule?

Nu blijkt dat voor het opslaan van de producten te weinig ruimte is om alle producten tegelijk te kunnen bergen, d.w.z.

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j y_j^* > A,$$

waarbij A de totale oppervlakte is van de beschikbare opslagruimte, en α_j de vereiste oppervlakte voor het opslaan van één product j .

- (b) Met welke methode moeten nu de optimale productieruns berekend worden. Bespreek in detail deze methode. Hoe heet deze methode? Bij deze methode komt een zogenaamde *multiplier* ter sprake. Welke interpretatie kun je deze multiplier in dit voorbeeld geven?

Puntenwaardering

opgave	a.	b.	c.	d.
1.	5	10	10	5
2.	10	5	5	-
3.	15	-	-	-
4.	5	5	10	-
5.	5	10	-	-