

Tentamen Inleiding Operationele Research, 14 januari 2002, 09.30-12.30 uur.

1. Gegeven is het onderstaande LP-probleem (P)

$$\max z = 4x_1 + 6x_2 + 7x_3$$

$$3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 45$$

$$7x_1 + 2x_2 - 5x_3 \geq 24$$

$$-2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Het programma SIMOPT geeft de onderstaande output voor het probleem (P).

Last Iteration

	X1	X2	X3	Slack1	Surp.2	Art.2	Art.3	RHS
Rel.Cost	??	??	??	??	??	??	??	??
X3	??	??	??	0.18	0.12	-0.12	-0.16	??
X1	??	??	??	0.13	-0.03	0.03	-0.20	??
X2	??	??	??	-0.03	-0.10	0.10	0.30	??

Value Objective Function : 68.7589

Variable	Activity Level	Reduced Cost
X1 :	5.1560	0.0000
X2 :	3.5461	0.0000
X3 :	3.8369	0.0000

	Slack of Surplus	Shadow prices
Constraint 1	0.0000	1.6099
Constraint 2	0.0000	-0.1348
Constraint 3	0.0000	-0.0567

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowed Interval
X1	4.0000	[??? , ???]
X2	6.0000	[-Infinity , 7.3571]
X3	7.0000	[5.8824 , Infinity]

Right-Hand-Side Ranges

Constraint	Current RHS	Allowed Interval
1.	45.0000	[23.3600 , 170.0000]
2.	24.0000	[??? , ???]
3.	8.0000	[-3.6279 , 32.5909]

- (a) Formuleer het duale probleem (D) van (P) en geef de *volledige* oplossingen van zowel (P) als (D). Vul ook het eindtableau volledig in.
- (b) Wijzig in (P) de opbrengstcoëfficiënt van x_1 van 4 in $4 + \eta$ en bereken de nieuwe volledige oplossingen van zowel (P) als (D) als functie van η behorende bij het huidige eindtableau. Bereken ook het toegelaten interval voor de opbrengstcoëfficiënt van x_1 .
- (c) Wijzig in (P) de rechterkantcoëfficiënt van de tweede bijvoorwaarde van 24 in $24 + \theta$ en bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van θ behorende bij het huidige eindtableau. Bereken weer het toegelaten interval voor de rechterkantcoëfficiënt van de tweede bijvoorwaarde.
- (d) We wijzigen nu (uitgaande van (P)) de rechterkantcoëfficiënten van de tweede en de derde bijvoorwaarde van 24 en 8 in resp. $24 + 2\theta$ en $8 - 3\theta$. Bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van θ en bereken voor welke waarden van θ de optimale oplossing *niet wezenlijk* verandert.
2. Op het beroemde Poissonlyceum is een verhitte discussie losgebrand over de vraag hoever men moet gaan met het toesnijden van het onderwijs op de individuele behoeften van de leerling. De 'traditionalisten', onder aanvoering van de heer Traas, hanteren het principe 'gelijke monniken gelijke kappen', hetgeen wil zeggen dat het totale beschikbare budget van B euro gelijk over de leerlingen verdeeld moet worden. De 'progressieven', aangevoerd door mevrouw Netelenbos, beweren daarentegen dat slimme leerlingen zelfstandiger zijn en daarom minder aandacht, en dus geld, vereisen dan hun intellectueel minder bedeelde medeleerlingen. Mevrouw Netelenbos beweert zelfs dat ze in staat is de individuele onderwijsbehoefte van elke leerling in een geldbedrag uit te drukken. Op het Poissonlyceum heeft men voor het komende schooljaar de leerlingen ingedeeld in N schoolklassen. Klas i bestaat uit A_i leerlingen die genummerd zijn van 1 t/m A_i ($i = 1, \dots, N$). Mevrouw Netelenbos heeft vastgesteld dat de behoefte aan kennis en aandacht van leerling j uit klas i vastgelegd kan worden in het bedrag v_{ij} . Zoals gebruikelijk bij progressieve voorstellen overschrijdt het totaal benodigde bedrag $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{A_i} v_{ij}$ ruimschoots het beschikbare bedrag B , zodat nooit aan alle verlangens van mevrouw Netelenbos kan worden voldaan. Mevrouw Ginjaar, de rectrix van het Poissonlyceum, moet nu een compromis vinden tussen de standpunten van de traditionalisten en de progressieven. Daartoe nodigt zij de heer Traas en mevrouw Netelenbos uit voor een gesprek, waarin zij voorstelt enigszins tegemoet te komen aan mevrouw Netelenbos door verschillende bedragen per leerling te reserveren voor leerlingen uit *verschillende* klassen, maar hetzelfde bedrag per leerling voor leerlingen uit dezelfde klas. Uiteraard sputtert zowel de heer Traas als mevrouw Netelenbos nog wat tegen dit compromis, maar gezien de politieke krachtsverhoudingen op het Poissonlyceum ziet men na enige tijd in dat er weinig anders opzit dan het voorstel van mevrouw Ginjaar te accepteren. Blijft de vraag volgens welk criterium de bedragen per leerling vastgesteld moeten worden. De heer Traas stelt voor de som van de maximale individuele tekorten per klas te minimaliseren (een individueel tekort voor leerling j uit klas i is het bedrag $(v_{ij} - y)^+ = \max(v_{ij} - y, 0)$ als besloten wordt aan leerlingen uit klas i een bedrag van y euro toe te wijzen). De porté van dit voorstel ontgaat de beide dames enigszins, maar men besluit wel volgens dit criterium een toewijzing vast te stellen.
- (a) Formuleer het probleem als een DP-(dynamisch programmerings)probleem met als optimaliteitscriterium het voorstel van de heer Traas. Beschrijf duidelijk alle elementen van de DP-algoritme (stadia, toestand, beslissing, etc.)

Geconfronteerd met de oplossing volgens het criterium van de heer Traas barst mevrouw Netelenbos in snikken uit. Zij ziet deze oplossing als een elitaire toewijzing van onderwijsgelden aan leerlingen die door moeder Natuur toch al bevoordeeld zijn. Om haar te troosten

stelt mevrouw Ginjaar nu voor het idee van gelijke bedragen voor leerlingen uit dezelfde klas te handhaven, maar nu bij de toewijzing van de bedragen een zo laag mogelijk maximaal individueel tekort na te streven.

- (b) Formuleer ook dit probleem als een DP-probleem (zelfde eisen als in onderdeel (a)).
 - (c) Naar welk van de twee voorgestelde criteria gaat jouw voorkeur naar uit? Geef een korte toelichting.
3. Sharon en Mark beschikken elk over 5 kaarten waarop de getallen 1 t/m 5 staan. Elk legt één van zijn/haar kaarten omgekeerd op tafel zodat de ander niet kan zien welk getal op de kaart staat. Vervolgens worden beide kaarten omgedraaid en vindt een uitbetaling plaats op grond van de volgende regels. Als één van beiden een oneven getal heeft neergelegd en de ander een even getal dan betaalt Mark aan Sharon een bedrag gelijk aan de som van deze getallen. In geval beiden een oneven getal of beiden een even getal hebben neergelegd dan betaalt Sharon aan Mark een bedrag gelijk aan de som van beide getallen. Omdat Mark en Sharon dit spel heel vaak gaan spelen willen beiden hun optimale gemengde strategie bepalen die hun minimale verwachte winst per spel maximaliseert. Formuleer *beide* lineaire programmeringsproblemen waaruit deze strategieën berekend kunnen worden.
4. Professor Minnaert heeft drie studentassistenten tot zijn beschikking om hem bij te staan met zijn onderzoek. Reeds lange tijd is hij bezig met een artikel dat de komende twee maanden februari en maart beslist moet worden voltooid. Er moeten nog vijf taken worden uitgevoerd die elk een vaste tijdsduur in weken vereisen. Aan elke taak kan in elke week door precies één studentassistent gewerkt worden, maar in verschillende weken wel door verschillende assistenten. Elke taak kent een vroegste startdatum, waarvòòr niet aan de taak gewerkt kan worden, en een uiterste einddatum, waarop de taak beslist voltooid moet zijn. In onderstaande tabel staan alle gegevens.

taak	tijdsduur	startdatum	einddatum
1. het schrijven van een computerprogramma	4 weken	01/02	07/03
2. het berekenen van de numerieke resultaten	2 weken	08/03	28/03
3. het verzorgen van de definitieve tekst van het artikel	5 weken	15/02	28/03
4. het bewijzen van een aantal technisch lemma's	5 weken	08/02	21/03
5. het vaststellen van de lijst met referenties	3 weken	22/02	28/03

- (a) Hoe kan men vaststellen of de drie studentassistenten in staat zullen zijn de vereiste taken binnen de gestelde termijnen uit te voeren.
 - (b) Beschrijf in *detail* de in onderdeel a. bedoelde algoritme in algemene termen.
 - (c) Teken *nauwkeurig* en *volledig* de gerichte graaf die bij bovenstaande tabel past, maar voer de in onderdeel b. beschreven algoritme niet uit. Geef wel aan wat in deze graaf het geval moet zijn om te kunnen concluderen dat de taken kunnen worden uitgevoerd binnen de gestelde termijnen. Beschrijf ook hoe, voor het geval de taken kunnen worden uitgevoerd, men nu vaststelt in welke weken aan de taken gewerkt moet worden.
5. In een poging zijn tanende nering uit het slop te halen wil Teun, de kroegbaas van het enige café in Oranjedorp op 2 februari ter gelegenheid van het huwelijk tussen Maxima en Willem Alexander een groots schaatsfestijn organiseren. Als het op 2 februari prachtig vriesweer is dan zal Teun met dit feest een winst van 20000 euro kunnen boeken. Is het daarentegen grijs/druilerig weer, dan zal de winst slechts 5000 euro zijn, omdat dan de kunstijsbaan moet worden gehuurd. In geval het weer slecht is, regen en/of storm, dan komt bijna geen mens opdagen en zal Teun een verlies lijden van 8000 euro. Vanwege de onzekerheid omtrent de weersgesteldheid overweegt Teun een alternatief feest in de vorm van een rolschaatsenbal

dat in de plaatselijke sporthal gehouden kan worden en daarom wat minder gevoelig zal zijn voor de weergoden, maar op zich wel veel minder mensen zal trekken. Teun schat dat bij vriesweer er een verlies geleden wordt van 6000 euro, bij grijs/druilerig weer een winst gemaakt kan worden van 3000 euro en bij regen/storm de winst 4000 euro zal zijn. Omdat Teun geboren en getogen is in Oranjedorp weet hij dat de kansen op vriesweer, grijs/druilerig weer en regen/storm weer, respectievelijk 0.2, 0.3 en 0.5 zijn. Hij vraagt zich vervolgens af welk feest hij moet organiseren om zijn verwachte winst zo groot mogelijk te laten zijn.

- (a) Stel een 'pay-off' matrix op. Noem de 'toestanden van de wereld' θ_j en de acties a_i en beschrijf deze in woorden. Bereken de MEV, MEVC en de EVPI. Welk feest moet Teun organiseren? Hoeveel zal hij maximaal willen betalen voor meer informatie omtrent de weersgesteldheid op 2 februari?

Teleurgesteld door de resultaten van onderdeel a. gaat Teun op bezoek bij zijn vroegere vriendin Aal die al decennia lang betrokken is bij de samenstelling van de Enkhuizer Almanak, en in die hoedanigheid een scherpe blik heeft ontwikkeld voor het doen van lange-termijn weersvoorspellingen. Teun vraagt Aal een voorspelling te doen voor 2 februari en belooft als tegenprestatie dat zij een jaar lang gratis jonge klare mag drinken in zijn café. Omdat Teun weet dat Aal, als gevolg van hun eerdere relatieproblemen, een stevige inneemster geworden is, schat hij de kosten van deze aangeboden alcoholische versnapering in op 1500 euro. Aal is bereid haar diensten onder deze voorwaarde aan te bieden, maar bedingt, als liefhebster van een kopstootje, nog wel dat ze naast de jonge klare gratis pils mag drinken tot een bedrag van 1000 euro in geval haar voorspelling blijkt uit te komen. Teun gaat hiermee accoord. Van Aal krijgt Teun wel gratis haar jarenlange ervaring aangeboden in de vorm van alle voorwaardelijke kansen op een bepaalde weersvoorspelling *gegeven* de weersgesteldheid. Deze staan in onderstaande tabel.

voorspelling \ weer	vriesweer	grijs/druilerig	storm/regen
vriesweer	0.8	0.15	0.05
grijs/druilerig	0.15	0.7	0.2
storm/regen	0.05	0.15	0.75

- (b) Analyseer met behulp van een volledige beslisboom of Teun de hulp van Aal moet invoeren. Wat is de maximale verwachte winst die Teun via het koninklijke huwelijk tussen Maxima Zorreguieta en Prins Willem Alexander kan behalen?

Puntenwaardering

opgave	a.	b.	c.	d.
1.	5	10	10	5
2.	10	5	5	-
3.	15	-	-	-
4.	5	5	10	-
5.	5	10	-	-