

1. Gegeven is het onderstaande LP-probleem (P) met onbekende parameters

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

We willen dit probleem bestuderen met de Simplex methode.

- (a) Introduceer de noodzakelijke slack, surplus en artificiële variabelen en geef het start *SIMPLEX* tableau voor fase 1 (uitgedrukt in de onbekende parameters). Wat moet men na fase 1 doen ter voorbereiding van fase 2?

Het eind-tableau van fase 2 staat hieronder gegeven.

var	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	RHS
z	0	0	0	2	$3/2$	$-3/2$	5	?
x_2	0	1	0	$-1/5$	$1/10$	$-1/10$	$3/5$	7
x_1	1	0	0	2	$-1/2$	$1/2$	1	4
x_3	0	0	1	$1/4$	$3/4$	$-3/4$	$-1/2$	9

- (b) Geef een stelsel van drie vergelijkingen waaruit we de onbekende parameters b_1 , b_2 en b_3 kunnen berekenen. De oplossing van dit stelsel is $b_1 = 7/4$, $b_2 = -141/8$ en $b_3 = 149/16$ [hoef je niet te controleren, maar mag natuurlijk wel!]. Bereken nu de optimale criteriumwaarde z^* .
- (c) Formuleer het duale probleem (D) van (P) en geef de *volledige* oplossingen van zowel (P) als (D).
- (d) Wijzig de rechterkantcoëfficiënt van de eerste bijvoorwaarde van $7/4$ in $7/4 + \theta$ en bereken de nieuwe volledige oplossingen van zowel (P) als (D) als functie van θ behorende bij het huidige eindtableau. Bereken vervolgens het toegelaten interval voor de rechterkantcoëfficiënt van de eerste bijvoorwaarde.
- (e) Geef een stelsel van drie vergelijkingen waaruit we de onbekende parameters a_{11} , a_{21} en a_{31} kunnen berekenen. De oplossing is $a_{11} = 5/12$, $a_{21} = 1/24$ en $a_{31} = 7/48$ [controle, zie boven]. Bereken nu de opbrengstcoëfficiënt c_1 .
- (f) Wijzig de opbrengstcoëfficiënt van x_1 van $3/2$ in $3/2 + \eta$ en bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van η behorende bij het huidige eindtableau. Bereken vervolgens het toegelaten interval voor de opbrengstcoëfficiënt van x_1 .
- (g) We wijzigen nu (uitgaande van (P)) de rechterkantcoëfficiënten van de eerste en derde bijvoorwaarde van $7/4$ en $149/16$ in resp. $7/4 + 2\theta$ en $149/16 - 3\theta$. Bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van θ en bereken voor welke waarden van θ de optimale oplossing *niet wezenlijk* verandert.

- (h) We wijzigen nu (uitgaande van (P)) de opbrengstcoëfficiënten van x_1 en x_3 van $3/2$ en 2 in resp. $3/2 + 2\eta$ en $2 - 3\eta$. Bereken de nieuwe volledige oplossingen van (P) en (D) als functie van η en bereken voor welke waarden van η de optimale oplossing *niet* *wezenlijk* verandert.

2. De algemeen coördinator voor EctOR, drs. Wubbe Plantsma, rekent het tot zijn taak de vorderingen van de eerste-, tweede-, derde- en vierdejaars studenten kritisch te volgen. Er zijn N_i i -dejaars studenten ($i = 1, 2, 3, 4$). Halverwege het jaar, na de januari-tentamens, stuurt het Onderwijsbureau, onder de bezielende leiding van drs. Leo Terzake, elke student een overzicht van zijn/haar tot dan toe in totaal behaalde studiepunten. Laat a_{ij} het aantal studiepunten zijn dat de j -de i -dejaars in totaal behaald heeft ($j = 1, 2, \dots, N_i$). Op grond van het aantal behaalde studiepunten besluit drs. Plantsma alle studenten in te delen in drie groepen (abusievelijk aangeduid met de term cohorten), de minkukels, de modalen en de toppers. Student j uit jaar i wordt als een minkukel beschouwd in geval zijn/haar totaal aantal behaalde studiepunten $a_{ij} \leq (2i - 1)14$, als een modale student in geval $(2i - 1)14 < a_{ij} < (2i - 1)24$ en als een topper in geval $a_{ij} \geq (2i - 1)24$. Vervolgens benoemt drs. Plantsma drie cohortbegeleiders die gesprekken zullen voeren met de studenten over hun (gebrek aan) vorderingen. Dr. Tantes wordt verantwoordelijk voor de toppers, dr. Bergkasteel voor de modalen, en dr. Edel mag zijn energie besteden aan de minkukels. Ondanks enig gegrom onder het personeel komt nu het Onderwijsbureau in actie in de persoon van drs. Terzake. Hij stuurt aan de cohortbegeleiders een stapel papier met alle mogelijke gegevens over de studenten die onder hun cohort vallen. Uit deze papierberg blijkt dat aan dr. Edel meer studenten zijn toegewezen dan aan de beide andere heren samen. Om tot een evenwichtiger werklast te komen gaat drs. Plantsma bij zichzelf te rade of hij een betere cohortindeling kan bedenken. Helaas schieten hiervoor zijn intellectuele vermogens tekort en daarom wint hij advies in bij dr. Edel, die tenslotte OR doceert. Ook dr. Edel ziet niet zo snel een oplossing, maar komt wel met een helder voorstel: waarom zouden we er geen opgave van maken voor het deeltentamen OR? De studenten zullen er waarschijnlijk ook niet uitkomen, maar die beschouwen dit deeltentamen toch als een D-toets, dus dat is geen probleem. Voor hen is het een goede intellectuele oefening en tevens komen eventuele toppers direct binnen het vizier van dr. Edel, die hen dan voor een assistentschap kan voordragen bij prof. van der Weg. Om een evenwichtige toewijzing van de studenten aan de begeleiders te kunnen garanderen beschouwt dr. Edel voor elke student de afwijking van het behaalde aantal studiepunten ten opzichte van de overheidsnorm van 21 studiepunten per half jaar, dus voor student j uit jaar i het getal $a_{ij} - (2i - 1)21$. We noemen dit getal de *deviatie* van een student (negatief voor minkukels, positief voor toppers!). Dr. Edel omschrijft het probleem nu als volgt: vind een indeling van de totale populatie studenten in drie groepen, zodanig dat de grootste absolute som van alle deviaties van de aan één begeleider toegewezen studenten zo klein mogelijk is, terwijl aan dr. Edel niet meer studenten worden toegewezen dan aan de andere heren samen, maar wel minstens anderhalf keer zoveel als aan dr. Bergkasteel, die vanwege wettelijk toegestane vakbondsactiviteiten enigszins ontlast wordt. Verder moet dr. Tantes alle vierdejaars minkukels onder zijn hoede nemen en dr. Edel naast minstens 80% van alle eerstejaars tevens alle tweedejaars toppers. Op deze wijze worden de studenten uiteraard evenwichtiger over de heren Tantes, Bergkasteel en Edel verdeeld, in dié zin dat begeleiding van een minkukel nu meestal gecompenseerd zal worden met begeleiding van een topper. Bovendien hoeft een student zich nu niet langer een minkukel te voelen omdat hij/zij door de heer Edel begeleid wordt.

- (a) Introduceer de binaire variabelen y_{ij} en w_{ij} voor $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, \dots, N_i$ waarvoor we de volgende bijvoorwaarden formuleren,

$$(1 + (2i - 1)14)(1 - y_{ij}) \leq a_{ij}, \quad a_{ij}y_{ij} \leq (2i - 1)14.$$

$$a_{ij}(1 - w_{ij}) \leq (2i - 1)24 - 1, \quad (2i - 1)24w_{ij} \leq a_{ij}.$$

Geef de interpretatie van de variabelen y_{ij} en w_{ij} .

- (b) Formuleer nu het probleem als een (geheeltallig) lineair programmeringsprobleem.

Aanwijzing: Introduceer nog de volgende binaire beslissingsvariabelen x_{ijk} met $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, \dots, N_i$ en $k = 1, 2, 3$. Bedenk zelf hoe deze variabelen geïnterpreteerd moeten worden.

Puntenwaardering

opgave	a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.	h.
1.	10	10	5	10	5	10	10	10
2.	10	20						