

Tentamen Inleiding Logica (veegtentamen)

23 oktober 2009

Opgave 1. (5 + 5 punten)

Leid met natuurlijke deductie af:

- (a) $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$
- (b) $p \rightarrow (q \vee r), \neg q \vdash p \rightarrow r$

Opgave 2. (2 + 4 + 4 punten)

- (a) Geef het op college en in het boek behandelde criterium om te bepalen of een conjunctieve normaalvorm (CNV) een tautologie is.

Bepaal een CNV voor de volgende twee formules, en bepaal aan de hand van de CNV of de formule een tautologie is:

- (b) $(\neg p \rightarrow \neg p) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow \neg p))$,
- (c) $\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow q$

Opgave 3. (4 + 2 + 4 punten)

Gegeven is de boolse functie $f(x, y, z)$ die 1 oplevert als precies 2 van de argumenten x, y, z de waarde 1 hebben, en die 0 oplevert in alle andere gevallen.

- (a) Bepaal een gereduceerde OBDD met ordening $[y, x, z]$ die deze functie representeert.
- (b) Zijn er nog andere gereduceerde OBDD's met dezelfde ordening voor $f(x, y, z)$?
- (c) Geef de gereduceerde OBDD met ordening $[y, x, z]$ voor de functie $\overline{f(x, y, z)}$.

Opgave 4. (4 + 4 punten)

Beschouw de formule $\exists x(Rxy \vee \neg \exists y Rxy)$

- (a) Teken de parse tree van deze formule.
- (b) Substitueer in de formule de (vrije voorkomens van) variabele y door de term $f(x)$.

[NB: zorg daarbij indien nodig door herbenoeming van variabelen dat er geen "clash" optreedt.]

Opgave 5. (5 + 5 punten)

Leidt met natuurlijke deductie af:

- (a) $\forall x \forall y (Px \rightarrow \neg Qx) \vdash \neg \exists x (Px \wedge Qx)$
- (b) $\forall x \neg Rxx \vdash \forall x \exists y \neg Rxy$

Opgave 6. (5 + 5 punten)

De volgende semantische implicaties zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

- (a) $Pc, Pd, c \neq d \models \forall x Px$
- (b) $\forall x \exists y Rxy, \forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx) \models \exists x \exists y \exists z (Rxy \wedge Ryz \wedge Rzx)$

Opgave 7. (4 + 4 + 4 punten)

Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik daarbij de vertaalsleutel

Kxy: x is een kind van y

Gxy: x getrouwd met y

Tx: x is thuis

a: Anna b: Barbara c: Chris

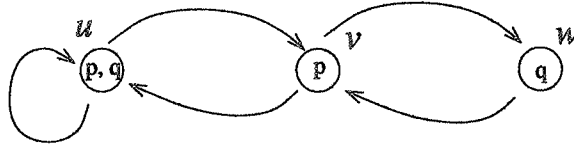
- (a) Anna heeft kinderen, maar is niet getrouwd.
- (b) Geen van Anna's kinderen zijn thuis, behalve Chris.
- (c) Barbara en Chris zijn Anna's enige twee kinderen.

Opgave 8. (4 + 4 punten)

- (a) Geef, indien mogelijk, een formule in de predikatenlogica die uitdrukt dat een model hoogstens 3 elementen bevat. [Als het niet mogelijk is, licht dat dan kort toe.]
- (b) Geef, indien mogelijk, een formule in de predikatenlogica die uitdrukt dat een model hoogstens eindig veel elementen bevat. [Als het niet mogelijk is, licht dat dan kort toe.]

Opgave 9. (6 + 3 + 3 punten)

Gegeven is het Kripke model $\mathcal{M} = (W, R, L)$ met als onderliggend frame $\mathcal{F} = (W, R)$, getekend in het volgende plaatje.



(a) Ga na voor welke werelden x geldt:

- (i) $\mathcal{M}, x \models \Diamond(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$
- (ii) $\mathcal{M}, x \models \Box q \rightarrow \Box(p \wedge q)$

Motivering is niet vereist.

- (b) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\models \Box p \rightarrow \Diamond p$. Als zo'n L' niet bestaat geef dan aan waarom niet.
- (c) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L'' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$ geldt: $\mathcal{M}'' \not\models \Box q \rightarrow \Diamond p$. Als zo'n L'' niet bestaat geef dan aan waarom niet.

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.