

Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 9 opgaven.

Per onderdeel is het aantal te behalen punten vermeld. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. Leid met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $(p \wedge q) \rightarrow \neg r \vdash (p \wedge r) \rightarrow \neg q$ (5 punten)
- (b) $\neg p, q \vee (r \rightarrow p) \vdash q \vee \neg r$ (5 punten)

Opgave 2.

- (a) Geef het in het college behandelde criterium om te bepalen of een conjunctieve normaalvorm (CNV) een tautologie is. (2 punten)
- (b) Bepaal een CNV voor de formule $(\neg p \rightarrow \neg p) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow \neg p))$.
Laat zien hoe je aan je antwoord komt. (4 punten)
- (c) Bepaal met het criterium uit (a) of de formule uit (b) een tautologie is. (2 punten)

Opgave 3. Gegeven is de boolse functie $f(x, y, z)$ die 1 is als minstens één van de variabelen x, y, z de waarde 1 heeft, en die 0 is in alle andere gevallen. Verder is gegeven de boolse functie $g(v, w)$ die 1 is als hoogstens één van de variabelen v, w de waarde 1 heeft, en die 0 is in alle andere gevallen.

- (a) Bepaal een gereduceerde OBDD van de functie f t.o.v. de variabelen ordening $[x, y, z]$; en een gereduceerde OBDD van de functie g t.o.v. de ordening $[v, w]$. (6 punten)
- (b) Geef nu een gereduceerde OBDD van de boolse functie $f(x, y, z) \cdot \overline{g(v, w)}$, met variabelen ordening $[x, y, z, v, w]$.
Hint: gebruik onderdeel (a) (4 punten)

Opgave 4.

- (a) Wanneer heet een verzameling formules in de predikatenlogica consistent? (3 punten)
- (b) Geef voor elk van de volgende verzamelingen formules aan of ze consistent zijn. (Alleen het antwoord volstaat.) (5 punten)
- (i) $\{\forall x Px, \exists x(\neg Px \vee \neg Qx)\}$
 - (ii) $\{\forall x Px, \forall x Qx, \exists x(\neg Px \vee \neg Qx)\}$
 - (iii) $\{\forall x(Px \vee Qx), \exists x\neg Px, \exists x\neg Qx\}$

Opgave 5. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $\exists x\forall y Rxy \vdash \exists x Rxx$ (5 punten)
- (b) $\forall x Px, \forall x\neg(Px \wedge Qx) \vdash \forall x\neg Qx$ (5 punten)

Opgave 6. De volgende gevolgtrekkingen zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

- (a) $\exists x Ax, \exists x Bx \models \exists x \exists y (x \neq y)$ (5 punten)
- (b) $\exists x\forall y Rxy, \neg\forall x\forall y (Rxy \vee Ryx) \models \exists x\neg Rxx$ (5 punten)

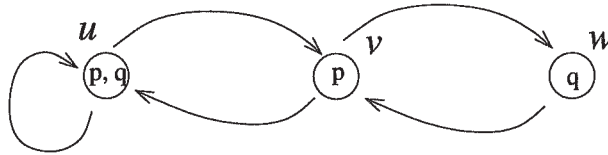
Opgave 7. Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

Hx: x is thuis
Wx: x werkt
Bxy: x is een broer van y
j: Janneke
g: Gerard

- (a) Al Janneke's broers zijn thuis, maar Janneke zelf werkt. (4 punten)
- (b) Alle broers van Janneke zijn thuis, behalve Gerard. (4 punten)
- (c) Als meerdere van haar broers thuis zijn, dan werkt Janneke niet. (4 punten)

Opgave 8.

Gegeven is het Kripke model $\mathcal{M} = (W, R, L)$ met als onderliggend frame $\mathcal{F} = (W, R)$, getekend in het volgende plaatje.



- (a) Ga na voor welke werelden x geldt: $\mathcal{M}, x \models \Diamond q \rightarrow (p \wedge q)$ (3 punten)
- (b) Ga na voor welke werelden x geldt: $\mathcal{M}, x \models \Box \Box q \rightarrow \Box q$. (3 punten)
- (c) Bestaat er een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\models \Box p \rightarrow \Diamond p$? Motiveer je antwoord. (4 punten)
- (d) Bestaat er een labelingfunctie L'' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$ geldt: $\mathcal{M}'' \not\models (p \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$? Motiveer je antwoord. (4 punten)

Opgave 9.

- (a) Beschouw de volgende instantie van het Post Correspondence Problem (PCP). Geef een oplossing, als die er is, of beredeneer dat er geen oplossing is. (4 punten)

$$((1000, 0), (0, 00), (000, 0011), (11, 10))$$

- (b) Bestaat er een algoritme dat voor een willekeurige formule ϕ uit de predikatenlogica beslist of $\models \phi$? Licht je antwoord kort toe. (4 punten)