

Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 8 opgaven. Nota bene: het voortentamen geeft geen vrijstelling. Iedereen dient alle opgaven te maken.

Per onderdeel is het aantal te behalen punten vermeld. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. Leid met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $q \wedge \neg(p \vee r) \vdash q \wedge \neg p$ (5 punten)
- (b) $q \vee r, q \rightarrow p \vdash \neg r \rightarrow p$ (5 punten)

Opgave 2. Van de propositielogische formule φ , die alleen de propositieletters p, q, r bevat, is gegeven dat $(q \vee r) \rightarrow p \models \varphi$, dat $\varphi \models p \vee \neg q$ en dat $\neg q \not\models \varphi$.

- (a) Geef de waarheidstafel van φ . (4 punten)
- (b) Bepaal een CNV voor de formule φ en geef daarbij aan hoe je aan je antwoord komt. (4 punten)

Opgave 3. Gegeven is de boolse functie $f(x, y)$ die 1 is als precies één van de variabelen x, y de waarde 1 heeft, en anders 0. Verder is gegeven de boolse functie $g(z, w)$ die 1 is als hoogstens één van de variabelen z, w de waarde 1 heeft, en anders 0.

- (a) Bepaal een gereduceerde OBDD van de functie f t.o.v. de variabelen ordening $[x, y]$; en een gereduceerde OBDD van de functie g t.o.v. de ordening $[z, w]$. (5 punten)
- (b) Geef nu een gereduceerde OBDD van de boolse functie $\overline{f(x, y)} \cdot g(z, w)$, met variabelen ordening $[x, y, z, w]$.
Hint: gebruik onderdeel (a) (5 punten)

Opgave 4. Leid met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $\neg\exists x Qx \vdash \forall x \neg Qx$; (4 punten)
- (b) $\exists x \neg Rxx \vdash \neg\forall x \forall y Rxy$ (4 punten)
- (c) $\forall x (x = a), Pb \vdash Pa$ (4 punten)

Opgave 5. De volgende gevolgtrekkingen zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

- (a) $\exists x \forall y Rxy \models \forall x \forall y (Rxy \vee Ryx)$
(6 punten)
- (b) $\neg\exists x \forall y Rxy, \forall x Rxx \models \exists x \exists y (\neg Rxy \wedge \neg Ryx)$
(6 punten)

Opgave 6. Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

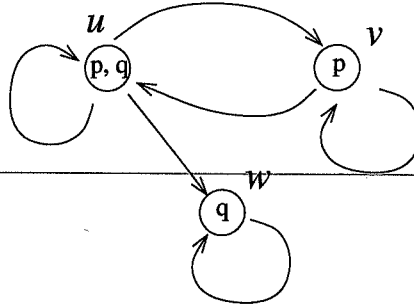
Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik daarbij de onderstaande vertaalsleutel.

Bx: x is een boek
Uxyz: x heeft y aan z uitgeleend
Lxy: x heeft y gelezen
a: Anna
c: Chris

- (a) Chris heeft alle boeken die hij heeft gelezen uitgeleend. (4 punten)
- (b) Chris heeft hoogstens één boek gelezen. (4 punten)
- (c) Er zijn precies twee boeken die Anna en Chris allebei hebben gelezen. (4 punten)

Opgave 7.

Gegeven is het Kripke model $\mathcal{M} = (W, R, L)$ met als onderliggend frame $\mathcal{F} = (W, R)$, getekend in het volgende plaatje.



- (a) Ga na voor welke werelden x geldt: $\mathcal{M}, x \models \Box p \rightarrow \Box \Box p$. Motiveer je antwoord.
(5 punten)
- (b) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\models \Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$. Als zo'n L' niet bestaat beredeneer dan waarom niet.
(5 punten)
- (c) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L'' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$ geldt: $\mathcal{M}'' \not\models \Box p \rightarrow p$. Als zo'n L'' niet bestaat beredeneer dan waarom niet.
(5 punten)

Opgave 8.

- (a) Formuleer de Volledigheidsstelling voor de predikatenlogica.
(2 punten)
- (b) Gebruik de Volledigheidsstelling om te bewijzen dat uit de aanname dat de verzameling formules $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ syntactisch consistent is (d.w.z. dat $\varphi_1, \dots, \varphi_n \not\vdash \perp$) volgt dat er een model $\mathcal{M}$ is zodat $\mathcal{M} \models \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$.
(4 punten)
- (c) Formuleer ook de Compactheidsstelling.
(2 punten)
- (d) Laat zien hoe de Compactheidsstelling volgt uit de Volledigheids- en/of de Correctheidsstelling.
(3 punten)