

Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 9 opgaven. Nota bene: het voortentamen geeft geen vrijstelling. Iedereen dient alle opgaven te maken.

Per onderdeel is het aantal te behalen punten vermeld. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. Leid met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $(p \vee r) \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg r$ (5 punten)
- (b) $\neg r, p \rightarrow (q \vee r) \vdash p \rightarrow q$ (5 punten)

Opgave 2. Bewijs of weerleg:

- (a) Als φ en $\varphi \rightarrow \psi$ beide tautologieën zijn, dan is ψ ook een tautologie. (4 punten)
- (b) Als φ en $\varphi \rightarrow \psi$ beide contingenties zijn, dan is ψ ook een contingentie. (4 punten)

Opgave 3. Transformeer de formule $\neg(p \wedge \neg r) \rightarrow (q \rightarrow r)$ naar conjunctieve normaalvorm. Laat zien hoe je aan je antwoord komt. (6 punten)

Opgave 4. Gegeven is de boolse functie

$$f(x, y, z) = x \cdot \bar{z} + y \cdot z$$

- (a) Geef een BDT (binary decision tree) voor $f(x, y, z)$. (2 punten)
- (b) Reduceer deze BDT met de regels C1-3 tot een reduced BDD. (4 punten)
- (c) Geef een reduced BDD voor de boolse functie $\overline{f(x, y, z)} + w$ (4 punten)

Opgave 5. Leid met natuurlijke deductie (ND) af:

(a) $\forall x(Px \rightarrow Qx), \exists xPx \vdash \exists xQx$ (6 punten)

(b) $\forall x\neg\exists yRxy \vdash \forall x\forall y\neg Rxy$ (6 punten)

Opgave 6. De volgende gevolgtrekkingen zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

(a) $\forall x\exists y(Rxy \wedge x \neq y) \models \forall x\forall y(x = y \vee Rxy \vee Ryx)$
(5 punten)

(b) $\forall x\forall y(((Ax \leftrightarrow Ay) \wedge (Bx \leftrightarrow By)) \rightarrow x = y) \models \forall x\forall y\forall z(x = y \vee x = z \vee y = z)$
(5 punten)

Opgave 7. Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

a: Arie
c: Cox
Lx: x is een logicus
Bxy: x bewondert y

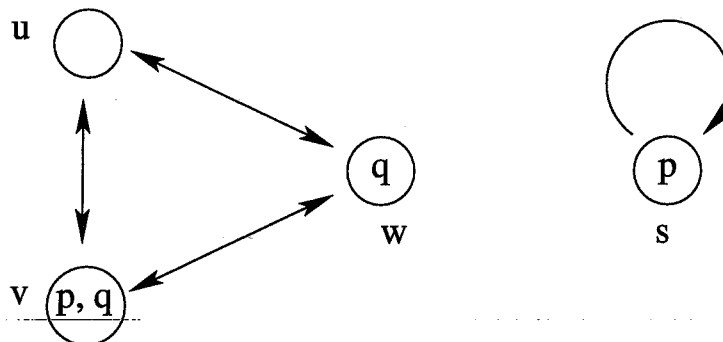
(a) Wie iedereen bewondert die zichzelf niet bewondert is geen logicus.
(4 punten)

(b) Minstens twee logici bewonderen Cox, maar Cox bewondert geen enkele logicus.
(4 punten)

(c) De enige twee logici die elkaar bewonderen zijn Arie en Cox.
(4 punten)

Opgave 8.

Gegeven is het Kripke model $\mathcal{M} = (W, R, L)$ met als onderliggend frame $\mathcal{F} = (W, R)$, getekend in het volgende plaatje.



- Ga na voor welke werelden x geldt: $\mathcal{M}, x \Vdash \Diamond p \rightarrow \Box q$.
(4 punten)
- Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\models \Diamond \Box p \rightarrow p$. Als zo'n L' niet bestaat beredeneer dan waarom niet.
(4 punten)
- Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L'' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$ geldt: $\mathcal{M}'' \not\models \Box p \rightarrow \Box \Box p$. Als zo'n L'' niet bestaat beredeneer dan waarom niet.
(4 punten)

Opgave 9.

- Formuleer de Compactheidsstelling voor de predikatenlogica.
(2 punten)
- Geef een formule die precies waar is in de modellen met minstens 3 elementen.
(4 punten)
- Bestaat er ook een formule die precies waar is in de modellen met een oneindig aantal elementen? Motiveer het antwoord.
(4 punten)