



Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 8 opgaven. Nota bene: het voortentamen geeft geen vrijstelling. Iedereen dient alle opgaven te maken.

Per onderdeel is het aantal te behalen punten vermeld. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. Leid met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $(p \wedge q) \vee r \vdash q \vee r$ (5 punten)
- (b) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow q, p \vdash q$ (5 punten)

Opgave 2. Van de propositiologische formule φ , die alleen de propositieletters p, q, r bevat, is gegeven dat φ geen contradictie is, dat $r \models \neg\varphi$, en dat $\varphi \models (p \vee q) \rightarrow r$.

- (a) Geef de waarheidstafel van φ . (4 punten)
- (b) Bepaal een CNV voor de formule φ en geef daarbij aan hoe je aan je antwoord komt. (4 punten)

Opgave 3. Gegeven is de boolse functie $f(x, y)$ die 1 is als de variabelen x, y dezelfde waarheidswaarde hebben, en die 0 is in alle andere gevallen. Verder is gegeven de boolse functie $g(z, w)$ die 1 is als variabele w de waarheidswaarde 0 heeft, en die 0 is in alle andere gevallen.

- (a) Bepaal een gereduceerde OBDD van de functie f t.o.v. de variabelen ordening $[x, y]$; en een gereduceerde OBDD van de functie g t.o.v. de ordening $[z, w]$. (5 punten)
- (b) Geef nu een gereduceerde OBDD van de boolse functie $\overline{f(x, y) \cdot g(z, w)}$, met variabelen ordening $[x, y, z, w]$.
Hint: gebruik onderdeel (a) (5 punten)

Opgave 4. Leid met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $\neg\exists x(Px \wedge Qx) \vdash \forall x(Px \rightarrow \neg Qx)$ (5 punten)
- (b) $\exists x\neg Rxx \vdash \exists x\exists y\neg Rxy$ (5 punten)
- (c) $Pb, \neg Pa \vdash \neg\forall x\forall y(x = y)$ (5 punten)

Opgave 5. De volgende gevolgtrekkingen zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

- (a) $\forall x\forall y(\neg Rxy \rightarrow Ryx) \models \exists x\forall y Rxy$ (5 punten)
- (b) $\exists x\exists y\exists z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \models \exists x\exists y(x \neq y \wedge (Ax \leftrightarrow Ay) \wedge (Bx \leftrightarrow By))$ (5 punten)

Opgave 6. Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

Bx: x is een boek
Uxyz: x leent y uit aan z
Lxy: x heeft y gelezen
Zxy: x is een zuster van y
a: Anna
c: Cris

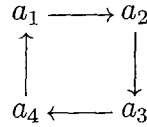
- (a) Anna leent geen boek dat ze nog niet heeft gelezen uit aan Cris. (4 punten)
- (b) Cris leent aan al haar zusters boeken uit, behalve aan Anna. (4 punten)
- (c) Cris heeft niet meer dan twee boeken gelezen. (4 punten)

Opgave 7.

Gegeven is het frame $\mathcal{F} = (W, R)$ met:

$$\begin{aligned} W &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \\ R &= \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_1)\} \end{aligned}$$

Het frame $\mathcal{F}$ is getekend in het volgende plaatje.



Op $\mathcal{F}$ definiëren we het Kripke-model $\mathcal{M}$ met de labeling functie:

$$L(a_2) = L(a_3) = \emptyset, \quad L(a_1) = \{p\}, \quad L(a_4) = \{p, q\}$$

- (a) Ga na voor welke werelden a_i geldt: $\mathcal{M}, a_i \Vdash \Diamond(p \vee q)$. (3 punten)
- (b) Ga na voor welke werelden a_i geldt: $\mathcal{M}, a_i \Vdash \Box(p \vee q)$. (3 punten)
- (c) Bestaat er een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\models \Diamond p \rightarrow \Box(p \vee q)$? Motiveer uw antwoord. (4 punten)
- (d) Met welke frame-eigenschap correspondeert de formule $\Box\phi \leftrightarrow \Diamond\phi$? Druk deze eigenschap uit in een predikaatlogische formule. (5 punten)

Opgave 8. We gebruiken een tweeplaatsig predikaatsymbool R . Het model $\mathcal{N}$ heeft als domein de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$, en $R^{\mathcal{N}}$ is de relatie $<$ (kleiner dan) op $\mathbb{N}$.

- (a) Wanneer heet een stel predikaatlogische formules φ, ψ consistent? (2 punten)
- (b) Geef een consistent stel formules φ, ψ , zodat $\mathcal{N} \models \varphi$, maar $\mathcal{N} \not\models \psi$. (4 punten)
- (c) Geef een model $\mathcal{M}$ zodat voor de in (b) gevonden formules φ, ψ zowel $\mathcal{M} \models \varphi$ als $\mathcal{M} \models \psi$ geldt. (4 punten)