

Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 8 opgaven. Nota bene: het voortentamen geeft geen vrijstelling. Iedereen dient alle opgaven te maken.

Per onderdeel is het aantal te behalen punten vermeld. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. Leid met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $p \wedge q, r \rightarrow \neg q \vdash p \wedge \neg r$ (5 punten)
- (b) $\neg(p \rightarrow q) \vdash p$ (5 punten)

Opgave 2. Van de propositiologische formule φ , die alleen de propositiesymbolen p, q, r bevat, is gegeven dat $p \vee (q \wedge r) \models \varphi$, dat $\varphi \models p \vee q$ en dat $q \not\models \varphi$.

- (a) Geef de waarheidstafel van φ . (4 punten)
- (b) Bepaal een CNV voor de formule φ en geef daarbij aan hoe je aan je antwoord komt. (4 punten)

Opgave 3. Gegeven is de boolse functie $f(x, y)$ die 1 is als precies één van de variabelen x, y de waarde 1 heeft, en die 0 is in alle andere gevallen. Verder is gegeven de boolse functie $g(z, w)$ die 1 is als precies één van de variabelen z, w de waarde 1 heeft, en die 0 is in alle andere gevallen.

- (a) Bepaal een gereduceerde OBDD van de functie f t.o.v. de variabelen ordening $[x, y]$; en een gereduceerde OBDD van de functie g t.o.v. de ordening $[z, w]$. (5 punten)
- (b) Geef nu een gereduceerde OBDD van de boolse functie $f(x, y) \cdot \overline{g(z, w)}$, met variabelen ordening $[x, y, z, w]$.
Hint: gebruik onderdeel (a) (5 punten)

Opgave 4. Leid met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $\exists x(Px \rightarrow Qx), \forall x\neg Qx \vdash \neg\forall xPx$ (5 punten)
- (b) $\neg\exists x(Px \vee Qx) \vdash \forall x\neg Qx$ (5 punten)
- (c) $\forall x\forall y(x = y), Pa \vdash Pb$ (5 punten)

Opgave 5. De volgende gevolgtrekkingen zijn ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

- (a) $\forall x\exists y(Rxy \vee Ryx), \neg\forall xRxx \models \forall x\forall y(Rxy \vee Ryx)$
(5 punten)
- (b) $\exists x\exists y\exists z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \models \exists x\exists y(x \neq y \wedge (Ax \leftrightarrow Ay) \wedge (Bx \leftrightarrow By))$
(5 punten)

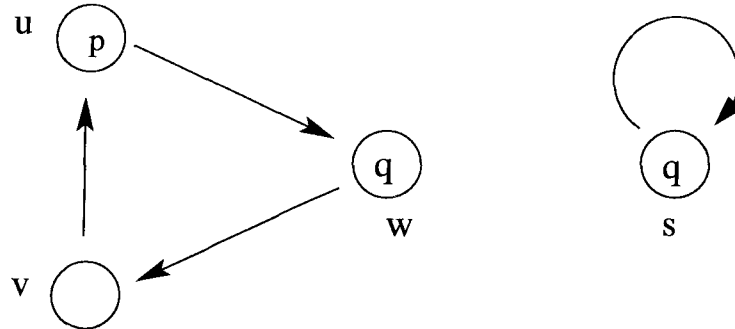
Opgave 6. Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

Ax: x is een auto
Gx: x is een garage
Bxy: x heeft y
Sxy: x staat in y

- (a) Niemand heeft een garage en geen auto.
(4 punten)
- (b) In iedere garage staat hoogstens één auto.
(4 punten)
- (c) Wie meer dan één auto heeft, heeft ook een garage.
(4 punten)

Opgave 7.

Gegeven is het Kripke model $\mathcal{M} = (W, R, L)$ met als onderliggend frame $\mathcal{F} = (W, R)$, getekend in het volgende plaatje.



- (a) Ga na voor welke werelden x geldt: $\mathcal{M}, x \models \Box(\Box q \rightarrow p)$.
(5 punten)
- (b) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\models \Diamond p \rightarrow \Box p$. Als zo'n L' niet bestaat beredeneer dan waarom niet.
(5 punten)
- (c) Geef als dat mogelijk is een labelingfunctie L'' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$ geldt: $\mathcal{M}'' \not\models \Box p \rightarrow \Box \Box q$. Als zo'n L'' niet bestaat beredeneer dan waarom niet.
(5 punten)

Opgave 8.

- (a) Formuleer de Volledigheidsstelling voor de predikatenlogica.
(2 punten)
- (b) Gebruik de Volledigheidsstelling om te bewijzen dat uit de aanname dat de verzameling formules $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ syntactisch consistent is (d.w.z. dat $\varphi_1, \dots, \varphi_n \not\vdash \perp$) volgt dat er een model $\mathcal{M}$ is zodat $\mathcal{M} \models \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$.
(4 punten)
- (c) Formuleer ook de Compactheidsstelling en leid deze af uit de Volledigheidsstelling.
(4 punten)