

Dit tentamen bestaat uit 3 pagina's; er zijn 8 opgaven. Nota bene: het voortentamen geeft geen vrijstelling. Iedereen dient alle opgaven te maken.

Per onderdeel is het aantal te behalen punten vermeld. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $\neg(p \vee q), r \vdash \neg(r \rightarrow p),$ (5 punten)
- (b) $(p \rightarrow r) \vee \neg q \vdash (p \wedge q) \rightarrow r.$ (5 punten)

Opgave 2.

- (a) Geef het in het college behandelde criterium om te bepalen of een conjunctieve normaalvorm (CNV) een tautologie is. (2 punten)
- (b) Bepaal een CNV voor de formule $(\neg p \rightarrow \neg q) \vee (\neg(p \wedge \neg r) \wedge (s \rightarrow q)).$
Laat zien hoe je aan je antwoord komt. (4 punten)
- (c) Bepaal met het criterium uit (a) of de formule uit (b) een tautologie is.
(4 punten)

Opgave 3. Gegeven is de boolse functie $f(x, y)$ die 1 is als precies één van de variabelen x, y de waarde 1 heeft, en die 0 is in alle andere gevallen.

Verder is gegeven de boolse functie $g(z, w)$ die 1 is als precies één van de variabelen z, w de waarde 1 heeft, en die 0 is in alle andere gevallen.

- (a) Bepaal een gereduceerde OBDD van de functie f t.o.v. de variabelen ordening $[x, y]$; en een gereduceerde OBDD van de functie g t.o.v. de ordening $[z, w]$. (5 punten)
- (b) Geef nu een gereduceerde OBDD van de boolse functie $f(x, y) \cdot g(z, w)$, met variabelen ordening $[x, y, z, w]$.
Hint: gebruik onderdeel (a) (5 punten)
- (c) Gegeven is de boolse functie $h(x, y, z, w)$ van vier variabelen x, y, z, w die 1 is als precies twee van de variabelen x, y, z, w de waarde 1 hebben, en die 0 is in alle andere gevallen. Geef een gereduceerde OBDD voor h met variabelen ordening $[x, y, z, w]$. (5 punten)

Opgave 4. Bewijs of weerleg de volgende beweringen (voor de propositielogica).

- (a) Als $\phi \models \psi$ en ϕ is een tautologie (dwz een geldige formule), dan is ook ψ een tautologie.
(5 punten)
- (b) Als $\phi \vee \psi$ een tautologie is en ϕ is geen tautologie, dan ψ is een tautologie.
(5 punten)

Opgave 5. Leidt met natuurlijke deductie (ND) af:

- (a) $\vdash \forall x(Px \vee \neg Px)$ (5 punten)
- (b) $\forall x(Px \rightarrow Sx), \exists x(Px \wedge \neg Qx) \vdash \neg \forall x(Sx \rightarrow Qx)$ (5 punten)

Opgave 6. De volgende gevolgtrekking is ongeldig. Laat dit zien door het aangeven van een tegenmodel.

$$\exists x \forall y Rxy, \forall x Rxx \models \forall x \forall y (Rxy \vee Ryx).$$

(8 punten)

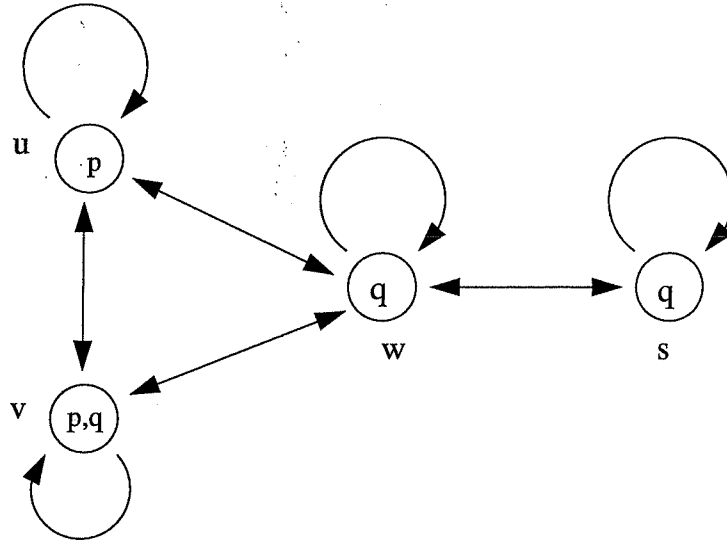
Opgave 7. Vertaal de onderstaande zinnen in de taal van de predikatenlogica. Gebruik de onderstaande vertaalsleutel.

Hx: x is thuis
Wx: x werkt
Sxy: x is een zuster van y
j: John

- (a) Als al zijn zusters thuis zijn werkt Jan niet
(4 punten)
- (b) Verschillende zusters van Jan werken thuis.
(4 punten)
- (c) Precies één zuster van Jan werkt thuis.
(4 punten)

Opgave 8.

Gegeven is het Kripke model $\mathcal{M} = (W, R, L)$ met als onderliggend frame $\mathcal{F} = (W, R)$, getekend in het volgende plaatje.



- Ga na voor welke werelden x geldt: $\mathcal{M}, x \models \Box q$.
(3 punten)
- Ga na voor welke werelden x geldt: $\mathcal{M}, x \models \Box(\Box q \rightarrow p)$.
(4 punten)
- Bestaat er een labelingfunctie L' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}' = (W, R, L')$ geldt: $\mathcal{M}' \not\models p \rightarrow \Box \Diamond p$? Motiveer uw antwoord.
(4 punten)
- Bestaat er een labelingfunctie L'' op het frame $\mathcal{F}$, zodanig dat voor het Kripke-model $\mathcal{M}'' = (W, R, L'')$ geldt: $\mathcal{M}'' \not\models \Box p \rightarrow \Box \Box p$? Motiveer uw antwoord.
(4 punten)